中国精算师资格考试用书

非寿险精算

Actuarial Aspects of Non-life Insurance

主编　韩天雄

主审　刘乐平

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

非寿险精算／韩天雄主编．—北京：中国财政经济出版社，2010.12
中国精算师资格考试用书
ISBN 978－7－5095－2550－0

Ⅰ.①非… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①保险－精算学－资格考核－自学参考资料 Ⅳ.①F840.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第200377号

责任编辑：李昊民　　责任校对：王　英
封面设计：耕者设计　　版式设计：兰　波

中国财政经济出版社出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100142
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092毫米　16开　17印张　402 000字
2010年11月第1版　2010年11月北京第1次印刷
定价：38.00元
ISBN 978－7－5095－2550－0/F·2170
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010－88190744

编审委员会



总 序

ZONGXU

精算起源于保险业，是保险公司经营不可或缺的核心技术之一。保险公司只有运用精算技术进行保险产品定价、准备金评估、风险管理等，才能在科学基础上实现保险业务的稳健经营，有效防范风险。

我们常说的精算，包括三个方面，即：精算理论技术、精算规则和精算师资格认证。

精算理论是对保险业务经营中各种不确定因素和风险规律的认识，精算技术以精算理论为指导，是精算工作中对各种不确定因素和风险进行识别、评估、定价、处置等所采用的方法、技术，包括所使用的数学模型、数学工具等。随着保险业经营实践的发展和人们认识的深化，精算理论技术也在不断发展。精算理论技术属于学术研究的范畴，可以存在不同的观点和流派，各种不同观点和流派之间的讨论、交流，可以促进精算理论技术的发展。

精算规则，是保险监管机关制定或认可的关于精算工作应当遵循、遵守或采用的原则、方法、标准、制度等规范。制定精算规则，以精算理论技术为基础，又要综合考虑一定时期的经济环境、保险业发展状况和风险特征、精算技术力量、监管政策的要求等多种因素。

精算工作需要专业人员从事，精算师就是具备精算的知识、技能，从事精算工作的专业技术人员。虽然精算师的从业范围不限于保险业，但主要还是在保险及相关行业就职（如对保险公司的精算报告进行审核的会计师事务所，为保险公司服务的精算咨询公司等）。在保险公司中，精算师责任重大。因此，必须经过资格认证，才能担任精算师（如同律师、注册会计师需要资格认证）。在国外，精算师资格的取得一般有两种方式：一种是通过专业资格考试取得，另一种是经过学历教育后取得，但主流是通过考试取得。在发达国家，精算师有自己的专业团体——精算师协会，一般由精算师协会组织资格考试，对通过考试的人授予精算师资格。

精算理论技术、精算规则、精算师资格认证三者相互联系，密不可分：精算理论技术是基础，制定精算规则、考试认证精算师，均以精算理论技术为基础，精算规则是精算师从事精算实务的直接依据。

我国自1980年恢复办理国内保险业务之后，曾长期缺乏精算专业人才，既没有制定精算规则，也没有建立自己的精算师资格考试认证制度。1988年南开大学在北美精算协会的支持下开办精算专业教育，此后国内又有多所大学开办精算专业教育，培养了一批精算人才。由于当时中国没有精算师资格认证制度，这些国内学习精算的人员主要是考取北美和英国等国外的精算师资格。1992年，国内的保险市场对外开放，外资保险公司进入国内市场，一些具有国外资格的精算师到国内工作。

1995年颁布并施行的《中华人民共和国保险法》中，要求寿险公司必须聘用经金融监管部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度。《保险法》首先要求寿险公司聘用精算师、建立精算报告制度，是因为：第一，精算起源于寿险业务经营，精算技术在寿险业的应用较为成熟；第二，寿险业务期限长，风险更具隐蔽性，对精算技术的运用更为迫切和重要，第三，在精算专业人员严重不足、精算规则空白的条件下，同时要求寿险业和非寿险业聘用精算专业人员、建立精算报告制度，难以实现。

为此，当时的保险监管部门——中国人民银行保险司于1997年10月启动了“中国精算制度建设”研究项目，决定建立中国的精算师资格考试认证制度，并逐步制定精算规则。中国的精算师资格考试认证制度，主要借鉴北美精算协会的考试体系，把精算师资格分为准精算师和精算师两个阶段，分别设立考试课程，通过准精算师考试课程的，授予准精算师资格，在获得准精算师资格基础上，再通过精算师资格考试的课程，授予精算师资格。在课程设置、考试内容、难度等方面，均力求达到与发达国家的精算师考试相当的水平。在制度设计、拟定考试大纲、教材编写过程中，得到国际精算团体的大力支持和帮助。1998年11月，中国保监会成立之后，继续推进精算制度建设。2000年，中国精算师资格考试开考，与此配套的教材也陆续出版发行。中国保监会1999年发布了关于寿险公司的精算规定，建立了寿险公司精算规则体系的基本框架。

2002年10月《保险法》进行了第一次修改，于2003年1月1日起施行。修改后的《保险法》把聘用经金融监管部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度的要求扩大到非寿险公司。因此，经过论证、筹备后，自2004年开始进行非寿险精算师的资格考试认证，称为中国精算师（非寿险方向），与此相适应，以前的精算师则称为中国精算师（寿险方向）。同时关于非寿险精算的规则也由中国保监会陆续制定发布。

2007年，中国精算师协会成立，组织精算师资格考试是协会的重要职能之一。协会设立了考试教育委员会，负责精算师资格考试和后续教育事宜（此前是由中国保险行业协会的精算工作委员会负责精算师资格考试）。

中国精算师资格考试施行10年来，通过考试认证了一批中国精算师和

中国准精算师，取得了一定成绩，积累了一定经验。目前已在北京、上海、天津、广州等15个城市设立了考试中心，并在香港、加拿大滑铁卢大学设立了2个海外考试中心，每年春秋两季举办考试。

随着国内保险市场的发育、精算技术的发展及国际精算界的变革，原有的考试体系已不完全适应。为此，中国精算师协会于2009年决定对中国精算师资格考试认证体系进行调整，并于2011年实施。调整的基本内容是：精算师资格考试仍分为准精算师和精算师两个阶段；在准精算师阶段，不再区分方向，对原寿险和非寿险两个方向的考试课程进行整合，考生通过8门必考的准精算师考试课程，并经过职业道德培训后，可获得中国准精算师资格；精算师则继续分为寿险和非寿险两个方向，有3年以上工作经历的准精算师，通过5门精算师考试课程，并经过职业道德培训后，可获得中国精算师（寿险方向）或中国精算师（非寿险方向）的资格，5门精算师考试课程，既有必考的，也有选考的，具体科目，因寿险和非寿险方向有所不同。

对于在旧考试体系下已经通过的考试科目，如何转换为新考试体系的相应科目，也进行了研究，制定了转换规则。

为编写新考试体系的教材，中国精算师协会成立了教材编审委员会。教材编写力图贯彻国际性、先进性和实用性三个原则。国际性是指，鉴于中国精算师协会已正式申请加入国际精算师协会，因此精算师资格考试必须符合国际精算师协会的要求，达到国际精算师协会的标准。所以，在课程设置、课程内容、必考科目等方面，均以国际精算师协会的要求为标准。先进性是指，尽可能把精算理论技术的最新成果包括在这套教材之中。实用性是指，教材内容紧密联系国内保险业的实际，考虑国内精算人员需要掌握的知识和技能。

教材的具体编写实行主编负责制。教材编审委员会研究、协调、决定教材编写中的重大事项，确定各门课程的主编和主审人员，指定协调人对若干相关课程的内容调整、取舍和进度进行协调。教材初稿完成后，不仅由主审进行审阅，而且组织保险公司的相关人员进行试读，提出修改意见。教材的主编、主审、试读人员，都是在保险业、精算界具有业务专长、经验较为丰富、具有一定影响力的人员。可以说，这套教材的编写，是集中了行业的智慧和力量，凝结着组织协调人员、编审人员、试读人员的心血。

尽管如此，我们仍不认为这套教材已经尽善尽美。由于经验不足、认识水平有限，也由于时间仓促，教材在某些方面还显粗糙，还存在许多可改进、待完善之处。我们希望在教材投入使用之后，听取专家、考生和社会各界人士的意见，将来进一步修订。

回顾中国精算师资格考试10年来的历程，是在保险监管机关的领导

下，在保险业、有关高等院校及社会各界的积极参与下，在国际精算组织的支持下，不断发展、完善，取得进步的。在此，我谨代表中国精算师协会，对多年来关心、支持、参与、帮助中国精算事业发展的有关领导、专家和广大的精算专业人员表示真诚的敬意和感谢！

中国精算师协会　会长　魏迎宁

2010年11月15日

编写说明

BIAN XIE SHUO MING

2008年，波及全球的金融危机不仅给各国的经济发展带来了严峻的考验，也给从事金融风险理论研究的精算师和金融数学工作者提出了更高的要求。要想建立更符合实际的风险模型，进而对可能发生的风险进行预测和评估，精算师和金融数学工作者不仅需要在宏观上对形势和环境有正确的把握，也需要在微观上提高对实际问题运用数学方法的精算技术，更需要具备在复杂情况下能够见微而知著的洞察和预见能力。当然，这绝不是一朝一夕之功，需要从培养和选拔精算师开始做起。

根据我国保险业的发展形势和培养高质量的精算师的需要，中国精算师协会设计了新的考试体系，并把《非寿险精算》作为中国精算师资格考试的科目。我们非常荣幸地接受并完成了编写《非寿险精算》考试大纲和考试用书的任务。

在中国精算师协会的具体指导下，我们努力把《非寿险精算》写成一本理论体系比较完整，数学方法比较实用，并具有自己特色的考试用书。

在本书的构思和撰写过程中，我们努力把握中国保险业中与非寿险精算相关的政策法规，力求将非寿险精算理论与实务的原理和方法应用于解决非寿险业务的实际问题。当然，我们写的是一本考试用书，要适应考试复习的需要。但我们更希望读者通过本书的学习，能够进一步培养在非寿险精算实务中运用数学方法和概率统计思想的综合能力，全面提高读者的思维素质。

由于编者学识和水平的局限，虽有上述愿望，未必能在书中全面体现。希望读者在使用过程中提出宝贵意见，以便于不断修改，精益求精。

本书由华东师范大学金融与统计学院韩天雄、钱林义和夏荣良编著，吴建莉和徐莉也参与了部分工作。

在本书的编写过程中，始终得到中国精算师协会的李达安、丁鹏、祝光建和谢志刚的关心、帮助和指导，编者在此表示深深的感谢。

在本书初稿形成后，中国精算师协会聘请天津财经大学刘乐平进行主审，在修改稿完成后，中国精算师协会委托郭仁斌在大地财产保险公司精算部组织了试读，根据各位专家的宝贵意见我们作了认真修改。这

本书的最后成型，离不开各位专家的贡献。在这里也请接受我们最真诚的谢意。

最后，还要对中国精算师协会秘书处以及出版社的编辑表示衷心的感谢，没有他们的劳动，本书是不会这么快与大家见面的。

编者

2010年8月

目　录

第一章 风险度量

学习目标

- □ 掌握风险及风险度量的定义，学会判断风险度量方法是否具有某种性质：非负附加、无过多附加、平移不变性、次可加性、可加性、正齐次性、客观性
- □ 掌握传统的风险度量方法，学会根据风险的具体特征选择特定的风险度量方法，并对风险度量的结果进行分析比较
- □ 掌握 Value-at-Risk 的基本理念和计算方法，学会在实际运用中对 Value-at-Risk 方法的参数进行合理设定，以得到有意义的风险度量结果
- □ 了解 CTE、TVaR、CVaR、ES、失真风险度量的定义和不同点，学会运用不同的风险度量方法，了解一致性风险度量的定义和重要性

§1.1 风险度量概述

近年来，全球金融市场在经济全球化、金融一体化的推动下得以迅猛发展，而与此同时，带来的是金融市场前所未有的波动性，如何应对日趋严重的风险已经成为金融机构亟待解决的头等大事。毫无疑问，金融风险的准确合理度量得到了金融机构、政策当局及学术界的密切关注。

1.1.1 风险的定义

风险（Risk）这个词被人们频繁地使用着。据考证，这个词来自意大利语的 risque，是在早期的航海贸易和保险业中出现的。在古老的用法中，风险被理解为客观存在的，可能发生的危险，如航海中可能遇到礁石、风暴等事件。而现在这个词已经不仅仅是最初的“遇到危险”的意思了，它在人类的决策和管理科学中也广泛地被使用着。

风险这个词具有多种含义。在日常生活中，每人所面临的具体问题不同，每人对风险这个概念的理解和描述也各不相同。迄今为止，即使在学术界也还没有形成关于风险的统一定义。人们通常将风险作为随机变量来处理，因此以随机变量为研究对象的概率论和数理统计就成为研究风险的数理工具。

风险一般具有以下的特征：

1. 风险具有客观性。风险是不以人们的意志为转移的客观存在。通过

寻找风险的概率分布以及计算其数学期望和标准差等，我们有可能对风险进行客观的度量。风险的客观性决定了风险是不可能彻底消除的，人们只能在一定的时间和空间内改变风险存在和发生的条件，降低风险发生的频率和损失幅度。

2. *风险具有普遍性*。风险普遍渗入到社会、个人生活的方方面面，无处不在，无时不有。人们在生活中面临着各种各样的风险，其中包括飓风、海啸、地震、洪水、泥石流等自然风险；包括战争、恐怖活动、偷盗抢劫、暴力等社会风险；也包括汇率的变动、物价的波动、股价的涨跌等各种经济风险；从保险的角度看，人们还面临着生、老、病、死、伤、残等人身风险；财产及其利益损毁和灭失等财产风险；由于疏忽或过失造成第三者人身伤亡或财产损失，依法应承担经济赔偿的责任风险；不履行合同的信用风险等。

3. *风险具有社会性*。风险与人类社会的利益密切相关，即无论风险源于自然现象、社会现象，还是源于生理现象，它必须是相对于人身及其财产的危害而言的。若没有人类的社会活动，就不会有预期的后果，也就不存在风险，所以，风险是一个社会范畴，而不是自然范畴。

4. *风险具有不确定性*。风险及其所造成的损失总体上来说是必然的、可知的；但是在个体上却是偶然的、不可知的，具有不确定性。这种不确定性表现为：损失是否发生不确定；损失发生在何时不确定；损失发生在何地不确定；损失发生的程度不确定。

5. *风险具有发展性*。风险会因时间、空间因素的发展变化而有所发展与变化。人类社会自身进步和发展的同时，也创造和发展了风险，尤其是当代高新科学技术的发展与应用，使风险的发展性更为突出。

1.1.2 风险度量方法

在过去，度量风险的方法繁多复杂，包括名义值、敏感性方法、情景分析等。尽管通过这些方法，我们可以对风险有直观的认识，但它们均没有考虑风险因素发生不利变动的概率及这些因素之间的相关性，也就无法度量出总体投资组合在不利情形下的风险，无法给出量化的解释。

于是，人们又提出了一系列的风险度量方法。风险度量的目的在于用一个数字 $\rho(X)$ 概括损失的整体分布。

由于风险定义为非负随机变量，度量风险相当于在随机变量空间和非负实数域 R^+ 之间建立一个映射。一般地，我们用 $\rho(X)$ 来度量风险 X。

了解风险度量方法所量化的是哪个方面的风险是至关重要的。所有的风险度量方法都不能把握风险的每个方面，而是侧重于某一特定方面的风险。

定义 1－1　风险度量方法是将风险 X 映射到非负实数域上的函数 $\rho(X)$，$\rho(X)$ 将风险 X 量化，当 $\rho(X)$ 比较大时，意味着 X 风险较高。

1.1.3　风险度量的性质

对于特定的风险度量来说，我们总希望它具有某些特性，以保证我们得到的风险度量的结果具有一定的准确性。这些性质包括非负附加，无过多附加，平移不变性，次可加性，可加性，正齐次性，客观性。下面我们将进行简单介绍。

1. 非负附加。对于风险 X，$\rho(X) \geqslant E(X)$。
2. 无过多附加。对于风险 X，$\rho(X) \leqslant \max(X)$。
3. 平移不变性。对于任意常数 c，有 $\rho(X+c) = \rho(X) + c$。
4. 次可加性。对于两个风险 X 和 Y，有 $\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$。
5. 同单调可加性。如果两个风险 X 和 Y 是同单调的，有 $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$。
6. 正齐次性。对于任意正常数 c，有 $\rho(cX) = c\rho(X)$。
7. 客观性。$\rho(X)$ 仅仅依赖于 X 的分布。

§1.2　传统的风险度量方法

1.2.1　传统的波动性方法——方差、标准差

在均值方差投资组合理论中，将资产组合的方差或者标准差作为一种度量风险的方法。因为方差衡量的是实际结果在期望值周围变化的程度。如果一个随机变量（风险）的方差小，说明实际结果可能接近期望值。相反，如果一个随机变量（风险）的方差大，说明实际结果可能远离期望值。因此，比较大的方差意味着结果比较难以预测，所以常用方差来度量风险。方差的数学表达式为 $\sigma^2 = E[(X-\mu_X)^2]$，其中，$\mu_X$ 是 X 的数学期望，σ 是标准差。

但是用波动性来度量风险存在两个主要的缺陷：第一，这种方法只描述了偏离的程度，而没有描述偏离的方向，而实际中我们最为关心的是损失偏离的方向。第二，波动性并没有反映损失到底是多大。对于随机变量统计特性的完整描述需要引入概率分布，而不仅仅是方差。

半方差风险度量方法是另外一种风险度量方法，这种方法产生的动机源于在风险度量中，只有产生损失的才是重要的。数学表达式为 $\sigma_{SV}^2 = E[(\max(0, X-\mu_X))^2]$，通常用样本半方差来估计，设样本量为 n，$sv^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{[\max(x_i - \bar{x}, 0)]^2}{n}$，

其中，$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i/n$。有时候，我们可以用任意的门限参数值$\tau$代替均值进行计算，得到门限半方差，即$sv_\tau^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{[\max(x_i-\tau,0)]^2}{n}$。

为了解决波动性方法的不足，产生了一种新的风险度量方法——VaR方法（这一方法将在1.3节详细介绍）。

1.2.2 传统的风险度量方法——从收益与风险的关系出发

现代资产组合理论和CAPM是建立在风险与收益的联系之上的，下面主要介绍三种度量收益与风险之间关系的方法。

1. Treynor度量方法。Treynor度量方法是指风险溢价与β_p（投资组合的Beta值）的比值，其中，β_p表示系统风险，为该投资组合收益与市场组合收益的协方差与市场组合方差的比值，数学表达式为：$\beta_p=\frac{\text{cov}(R_p,R_M)}{\sigma_M^2}$。因此，Treynor度量方法的数学表达式为：

$$\text{Treynor度量方法}=\left[\frac{E(R_p)-R_F}{\beta_p}\right]$$

其中：R_p表示该投资组合的收益；R_M表示市场组合的收益；R_F表示无风险收益；σ_M^2表示市场组合的方差。

2. Sharpe度量方法。Sharpe度量方法是指风险溢价与标准差的比值，其中，标准差表示总风险。数学表达式为：

$$\text{Sharpe度量方法}=\left[\frac{E(R_p)-R_F}{\sigma_p}\right]$$

其中：σ_p^2表示投资组合组合的方差。

3. Jensen's alpha。Jensen's alpha是指资产收益超出CAPM模型中预测的收益的部分。

$$\text{Jensen's alpha}=\alpha_p=E(R_p)-[R_F+[E(R_M)-R_F]\beta_p]$$

对于特定的资产组合来说，这三种度量的值越大越好。其中，Treynor和Sharpe方法是最相近的，它们都是通过除以风险的度量值将风险溢价进行标准化。因为Sharpe方法采用的是总风险，所以投资者可以对所有的资产组合应用该方法，这也是为什么Sharpe方法较其他两种更常用的原因。Treynor方法更适合用于对非系统风险分散化的投资组合。而对于具有相同Beta值的投资组合来说，Jensen's alpha是最适合的方法。

比较选择这三种方法是很重要的，除此之外，了解它们之间的联系也是有重要意义的。举例来说：

$$\text{Treynor度量方法}=\left[\frac{E(R_p)-R_F}{\beta_p}\right]=\frac{\alpha_p}{\beta_p}+[E(R_M)-R_F]$$

对于风险分散化的投资组合来说，我们可以利用如下近似：$\beta_p \approx \frac{\sigma_p}{\sigma_M}$

将其代人 Jensen's alpha，并通过变换，我们得到：

$$\text{Sharpe 度量方法} \approx \frac{\alpha_p}{\sigma_p} + \frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M}$$

再次利用近似：$\beta_p \approx \frac{\sigma_p}{\sigma_M}$

我们得到 Sharpe 度量方法 $\approx \left[\frac{\text{Treynor 度量方法}}{\sigma_M}\right]$

1.2.3　基础风险资本方法

另外在保险公司还有一种常用的财务风险度量和监管的方法——基础风险资本方法。基础风险资本即“Risk-Based-Capital”，缩写为 RBC，RBC 依据各家保险公司自身的风险状况，评价该公司资本和盈余是否充足。这是一种量化风险的监管方法，它能预先识别财务风险，也能避免保险公司偿付能力进一步恶化。RBC 分两步操作：第一步，确定风险资本公式，它依据保险公司的规模和风险状况得出该公司用于支持业务经营所需的最低资本。

$$\text{产险公司的最低风险资本} = R_0 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2} \tag{1.2.1}$$

其中，R_0 为资产负债表外风险（Off-balance Sheet Risk）；R_1 为固定收益投资风险（Fixed-income Investments Risk）；R_2 为权益投资风险（Equity Investments Risk）；R_3 为信用风险（Credit Risk）；R_4 为准备金风险（Reserving Risk）；R_5 为签单保费风险（Written Premium Risk）。

第二步，根据风险资本比率（总调整资本/最低风险资本）监管机构采取相应的监管行动。其中产险公司的总调整资本是公司资本金减去特定赔款准备金。即：

$$\text{风险资本（RBC）比率} = \frac{\text{总调整资本}}{\text{最低风险资本}} \times 100\% \tag{1.2.2}$$

风险资本比率在不同范围，监管部门就会采取不同的措施。风险资本比率大于 200% 时，属于无行动水准（No Action Level），即可视为保险人具有足够的偿付能力，监管单位不需采取任何行动；风险资本比率介于 150% 至 200% 时，属于公司行动水准（Company Action Level），保险人需依规定申报风险基础资本，并需提出完整的财务计划给监管部门；风险资本比率介于 100% 至 150% 之间时，属于监管行动水准（Regulatory Action Level），监管部门可以发布命令，纠正保险公司，并且要求公司提出财务改善计划；风险资本比率介于 70% 至 100% 之间时，属于授权控管水准（Authorized Control Level），监管部门可以对保险公司采取重整或清算的行

动；风险资本比率低于70%，属于强制控管水准（Mandatory Control Level），保险公司应该被接管。

这里，我们还必须讲一下损失、赔款之间的关系。

所谓损失，指的是保险标的在保险事故中遭到的实际损失额。保险标的的损失是不确定的，但可以用货币来衡量其价值，因而我们常用一个随机变量来描述。

保险公司的赔款额是由保险标的的实际损失所决定，但它并非总等于保险标的的损失额。事实上，保险公司在理赔时还要考虑保险金额（赔款限额）、免赔额、承保比例等诸多因素。一般来说赔款不会超过损失额。

虽然保险人主要关心的是自己的赔款责任，但确定保险人赔款责任的依据是保险标的的实际损失，只要弄清楚保险标的的损失，再按照保险合同的规定就能确定赔款额。因此，非寿险精算把更多精力集中在研究损失的分布及其特征上，而且我们在讨论中（除非特别说明），一般也不严格区分是损失分布还是赔款分布。

保险标的损失次数和损失额的大小是不确定的，因此我们用随机变量来表示它们，并通过研究这些随机变量的概率分布及其数字特征来研究它们的性质。

我们可以用随机变量的期望、方差、各阶矩、偏度、峰度、中位数、分位数、众数等数字来反映随机变量的分布特征。

接下来，我们来看几个例子，具体来看数字特征在非寿险中的运用。

我们将保险赔付随机变量的标准差 Q 与所收的纯保费 P 的比值称作财务稳定性系数，用 K 表示：

$$K=\frac{Q}{P} \tag{1.2.3}$$

财务稳定性系数可以用来分析某一险种或整个公司的财务稳定情况，度量经营风险。系数 K 愈小，说明经营风险较小，财务较稳定。因此有学者提出，要求尽可能使 $K<0.1$。

我们只要知道损失随机变量服从的分布，就可以计算财务稳定性系数。

假如某保险公司承保 n 个相互独立的危险单位，每个单位的保额都为 a 元，损失概率为 p，这里假定若危险单位出险则为全损，纯费率为 q，则损失变量都服从二项分布，故保险赔付的标准差 $Q=a\sqrt{np(1-p)}$，纯保费 $P=anq$，得到财务稳定性系数。

$$K=\frac{Q}{P}=\frac{a\sqrt{np(1-p)}}{anq}=\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}q} \tag{1.2.4}$$

从上式可以看出，K 与 q、$\sqrt{n}$成反比。提高纯费率 q，可以降低财务稳定性系数 K 值，提升财务稳定性。但是提价将影响公司的市场竞争力，因

此此方法不十分可取。其次，增加承保标的数量 n，也可提高财务稳定性。实务中，各保险公司都十分重视展业。$\sqrt{p(1-p)}$ 先随着 p 的增加而增加，在 $p=0.5$ 处达到最大，而后随着 p 的增加而减少。但在实务中损失概率 p 一般都小于 0.5，所以，损失概率 p 降低将提高财务稳定性，这就要求保险公司对承保标的进行风险管理，防灾防损，以降低公司的经营风险。

我们称 $\frac{\sqrt{\mathrm{VaR}X}}{EX}$ 为随机变量 X 的变异系数，它常用来度量损失变量的风险，当损失变量服从二项分布，且纯费率 q 与损失概率 p 相等时，财务稳定系数 K 就是变异系数。

特别地，假定保险公司有 n 类业务，其中第 i 类业务承保 n_i 个相互独立的危险单位，每个单位的保额为 a_i 元，并假定出险则为全损，且损失概率（等于纯费率）为 p_i，则第 i 类业务纯保费为 $a_i n_i p_i$，赔付的方差为 $a_i^2 n_i p_i(1-p_i)$。所以整个公司度量经营风险的财务稳定性系数为：

$$K=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[a_i^2 n_i p_i(1-p_i)]}}{\sum_{i=1}^{n}[a_i n_i p_i]} \tag{1.2.5}$$

【例 1－1】 某公司承保业务如表 1－1 所示，要求在上述假设下，计算各类业务和合并业务的财务稳定系数 K。

表 1－1　　某公司承保业务统计

类　别	承保单位数量 n_i	单位保额 a_i	损失概率 p_i
一	6 000	5 000	2%
二	1 000	30 000	2%
三	300	100 000	2%

解：$K_1=\frac{a_1\sqrt{n_1p_1(1-p_1)}}{a_1n_1p_1}=0.09$

同理 $K_2=0.22$，$K_3=0.4$

$$K_{1+2}=\frac{\sqrt{a_1^2n_1p_1(1-p_1)+a_2^2n_2p_2(1-p_2)}}{a_1n_1p_1+a_2n_2p_2}=0.12$$

同理，$K_{1+3}=0.21$，$K_{2+3}=0.23$，

$K_{1+2+3}=0.16$

假如保险公司目前所承保业务的财务稳定性良好，纯保费总额为 P，保险赔付标准差为 Q，$K=\frac{Q}{P}$。为了进一步发展业务，现在要研究所承保的每个危险单位最高保险金额为多少时，才不致使原有的财务稳定性系数 K 增大。

假定新承保 n 个危险单位，每个危险单位保险金额为 x 元，损失概率（等于纯费率）为 p，则

$$P_1 = xnp,\ Q_1 = x\sqrt{np(1-p)}$$

合并业务后，新的财务稳定系数为 K^*，则

$$K^* = \frac{\sqrt{Q^2 + x^2 np(1-p)}}{P + xnp}$$

欲使 $K^* \leqslant K = \frac{Q}{P}$，令 $K^* = \frac{Q}{P}$

则有 $x = \frac{2K^2P}{1-p(1+nK^2)}$

当损失概率 p 很小时，x 近似等于 $2K^2P$

在例 1-1 中，如果对第一、第二类合并业务后的财务稳定系数 $K_{1+2} = 0.12$ 比较满意，那么新承保的业务的最高保险金额约为：

$$x = 2\times 0.12^2 \times (5\ 000\times 6\ 000\times 0.02 + 30\ 000\times 1\ 000\times 0.02)$$
$$= 34\ 560\ (元)$$

通过上述分析，公司决定对第三类业务进行再保险，自留额为 35 000 元。容易计算，第三类业务分保以后，三类业务合并后的财务稳定系数 $K^*_{1+2+3} = 0.118$，符合原有的设想。

从上述例子，我们可以看到再保险也能提升财务稳定性，降低经营风险。更进一步，如果我们把二、三两类业务的自留额都定为第一类业务的保险金额 5 000 元，那么公司进行再保险后，所留的业务相当于 7 300（6 000 + 1 000 + 300）个危险单位，保额为 5 000 元，那么 K 将达到最小值

$$K = \frac{5\ 000\times\sqrt{7\ 300\times 0.02\times 0.98}}{5\ 000\times 7\ 300\times 0.02} = 0.08$$

所以通过再保险，能够将财务稳定系数降至最小值 0.08。如果再降低自留额，那么公司只能继续耗费再保险费，而不可能进一步提高财务稳定性了。

【例 1-2】 某公司承保业务如例 1-1，为保证保单组合的财务稳定系数 $K = 0.1$，问再保险的自留额 x 应定为多少？

解： 由例 1-1 知 $K_1 = 0.09$，$K_{1+2} = 0.12$，$K_{1+2+3} = 0.16$，所以再保险的自留额 $x > 5\ 000$，但第二、第三类业务都必须分保，利用

$$K = \frac{\sqrt{5\ 000^2\times 6\ 000\times 0.02\times 0.98 + x^2\times 1\ 300\times 0.02\times 0.98}}{5\ 000\times 6\ 000\times 0.02 + x\times 1\ 300\times 0.02} = 0.1$$

得 $x = 18\ 566$。

§1.3 VaR 风险度量（Value-at-Risk）

VaR 风险度量之前的风险度量方法都没有将损失与概率联系起来，而

且都无法将各个不同市场中的风险加总，对风险作出精确的度量是风险管理者选择风险度量方法的主要目标。

1.3.1 VaR 的定义

VaR 是英文 Value-at-Risk 的缩写，中文含义是“处于风险中的价值”，或称“在险值”，是指在某一特定的持有期内，在给定的置信水平下，某一金融资产或证券组合的最大可能损失。VaR 模型的最直观的优势在于一个数字就可以反映整个投资组合所面临的风险、组合内的风险分散效应以及风险与概率之间的联系。VaR 模型是 1993 年 J. P. Morgan 在考察衍生产品的基础上提出的一种风险测度方法。VaR 方法一经提出便受到广泛欢迎：巴塞尔银行监管委员会于 1996 年推出的巴塞尔协议的补充规定中，明确了提出基于银行内部 VaR 值的内部模型法，并要求作为金融机构计量风险的基本方法之一；美国证券交易委员会（SEC）1997 年 1 月规定上市公司必须及时披露其金融衍生工具交易所面临风险的量化信息，指出 VaR 方法是可以采用的三种方法之一；目前美国一些较著名的大商业银行和投资银行甚至一些非金融机构都已经采用 VaR 方法。

定义 1－3 VaR 的基本含义是在某一特定的持有期内，在给定的置信水平下，给定的资产或资产组合可能遭受的最大损失值。

其数学定义式为：$\mathrm{VaR}[X;p]=F_X^{-1}(p)$

其中，$F_X^{-1}(p)=\inf\{x\in R \mid F_X(x)\geqslant p\}$

这一含义体现了 VaR 度量技术的综合性。

当 X 服从连续分布时，我们有 $\Pr[X\leqslant Q_p]=p$，即 $F_X^{-1}(p)=Q_p$，在后面的计算过程中，我们均采用 Q_p 表示风险价值，风险价值法也称为分位数风险度量。

为了更好的理解 VaR 的概念，我们来看几个简单的例子，如 J. P. Morgan 公司 1994 年年报披露，1994 年该公司一天的 95% VaR 值为 1 500 万美元。也就是说，该公司可以 95% 的把握保证，1994 年每一特定时点上的证券组合在未来 24 小时之内，由于市场价格变动而带来的损失不会超过 1 500 万美元。

【例 1－3】 假设损失 X 服从分布（见表 1－2）：

表 1－2

X	100	50	10	0
P	0.005	0.045	0.10	0.85

我们可以得到（见表 1－3）：

表 1 – 3

x	$\Pr[X\leqslant x]$
100	1.00
50	0.995
10	0.95
0	0.85

现在，如果我们对 99% 分位数感兴趣，而在给定的分布中找不到 Q 使得 $\Pr[X<Q]=0.99$。

因此，我们选择 VaR 为 50，$50=\inf\{Q:\Pr[X<Q]\geqslant 0.99\}$。

【例 1 – 4】 假设损失 X 服从正态分布 $N(33,109^2)$。

由于损失随机变量服从连续分布，我们可以直接得到损失分布的 95% 分位数。

$$\Pr[X\leqslant Q_{0.95}]=0.95$$

$$\Phi\left(\frac{Q_{0.95}-33}{109}\right)=0.95$$

$$\Rightarrow\left(\frac{Q_{0.95}-33}{109}\right)=1.6449$$

$$\Rightarrow Q_{0.95}=212.29$$

【例 1 – 5】 假设损失 X 服从对数看跌期权。

我们来看这样一个例子，损失额为 $1\ 000\max(1-S_{10},0)$，其中，S_{10} 是 $T=10$ 的投资者投资的股票价格，而初始值为 $S_0=1$。我们假设投资的股票价格 S_t 服从参数为 $\mu=0.08$，$\sigma=0.22$ 的对数正态过程，也就是说 $S_t\sim LN(\mu t,\sigma^2 t)$。通过计算我们可以得到该损失分布的均值为 33.0，标准差为 109.0。这是可变年金中运用的看跌期权的一个简化版本。

我们首先来看损失为 0 的概率：

$$\Pr[X=0]=\Pr[S_{10}>1]=1-\Phi\left(\frac{\log(1)-10\mu}{\sqrt{10}\sigma}\right)=0.8749$$

接下来求 $Q_{0.95}$：

$$\Pr[X\leqslant Q_{0.95}]=0.95$$

$$\Leftrightarrow\Pr[1\ 000(1-S_{10})\leqslant Q_{0.95}]=0.95$$

$$\Leftrightarrow\Pr\left[S_{10}>\left(1-\frac{Q_{0.95}}{1\ 000}\right)\right]=0.95$$

$$\Leftrightarrow\Phi\left[\frac{\log\left(1-\frac{Q_{0.95}}{1\ 000}\right)-10\mu}{\sqrt{10}\sigma}\right]=0.05$$

$$\Leftrightarrow Q_{0.95}=291.30$$

1.3.2　VaR 的计算方法

1. 一般分布中的 VaR。为了计算某一投资组合中的 VaR，我们假定 W_0 为初始投资额，R 为投资收益率。投资组合的价值在目标投资期末将为 $W = W_0\ (1+R)$。设 R 的预期收益率和投资波动率分别为 μ 和 σ。现在定义在给定置信水平下的投资组合最小价值为 $W^* = W_0(1+R^*)$，其中 R^* 为最低收益率。相对 VaR 是对期望值而言，

$$\text{VaR}(\text{平均值}) = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu) \qquad (1.3.1)$$

有时 VaR 被定义为绝对 VaR，即以美元计价的相对于 0 时刻的资产价值的损失，与期望值无关：

$$\text{VaR}(\text{零值}) = W_0 - W^* = -W_0 R^*$$

在这两种情况下，找到了投资组合的最小价值 W^* 或收益率的临界点 R^* 就等同于找到了 VaR。

如果期限较短，平均收益率可能很小，此时，这两种方法都将给出近似的结果。相反，当期限较长时相对 VaR 在概念上更为合适，因为它的风险来自对期望值的偏离，或在目标日期时正确考虑资金的时间价值的“预算”。如果这个期望值为正的话，则该方法更为保守。唯一的缺陷是，有时期望回报率难以评估。

VaR 最普通的形式可从未来投资组合价值 $f(w)$ 的概率分布中得到。给定置信水平 c，我们试图找出最小的 W^*，这样超出该值的概率为 c：

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)\,dw$$

或者表述为低于 W^* 的概率，$p = P(w \leqslant W^*)$，为 $1-c$：

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)\,dw = P(w \leqslant W^*) = p$$

换句话说，从 $-\infty$ 到 W^* 区域的面积 p 必须等于 $1-c$，如 5%。W^* 的数值被称为分布的分位数（Quantile）。注意，我们没有用标准差求 VaR。这种说明对任何分布都有效。

2. 参数分布中的 VaR。如果分布属于某类参数分布，如正态分布，则 VaR 的计算可大大简化。在这种情况下，使用一个依靠置信水平的多样性因素，VaR 可直接由投资组合的标准差得到。该方法有时被称为参数法，因为它包括参数的估计值，如标准差，而不是从经验分布中求分位数。

这种方法简单、方便，而且正如我们后面将会看到的一样，这种方法产生更加精确的 VaR 测量值。问题是，这个正态的近似值是否是真实的？如果不是的话，那么另一个分布可能更适合这些数据。

首先，我们必须将一般分布 $f(w)$ 转换为标准正态分布 $\Phi(\varepsilon)$，$\varepsilon \sim N(0,1)$。我们将 W^* 以最低收益率 R^* 表示，得到 $W^* = W_0(1+R^*)$。R^* 通

常为负值，可写作 $-|R^*|$。我们可进一步以 R^* 表示标准正态偏差 $\alpha>0$，

$$-\alpha=\frac{-|R^*|-\mu}{\sigma}$$

这等于设：

$$1-c=\int_{-\infty}^{W^*}f(w)dw=\int_{-\infty}^{-|R^*|}f(r)dr=\int_{-\infty}^{-\alpha}\Phi(\varepsilon)d\varepsilon$$

这样，求 VaR 的问题就变为求偏差 α，使其左边的面积等于 $1-c$。可能使用累积标准正态分布函数，表中数值表示标准正态密度函数在直线 $x=d$ 左边部分的面积，$N(d)=\int_{-\infty}^{d}\Phi(\varepsilon)d\varepsilon$。这一函数在布莱克——斯科尔斯期权定价模型中也起着重要的作用。

要得到标准正态变量的 VaR，我们需在纵轴上选取左尾期望置信水平（如 5%），相当于 $\alpha=1.65$（零的下方）的值。返回我们的步骤，从 α 可得出最低收益率 R^* 和 VaR，等式中，最低收益率为：$R^*=-\alpha\sigma+\mu$

为了使其具有一般性，我们现在假设参数 μ 和 σ 都以年为基础。时间间隔为 Δt（单位是年）。我们将其代入等式（1.3.1），我们得到 VaR 的平均值为：

$$\text{VaR}(\text{平均值})=-W_0(R^*-\mu)=W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}$$

换句话说，VaR 的值只是一定分布下的标准差与一个和置信水平及期限直接相关的调整因素的简单乘积。

当 VaR 被定义为绝对美元损失时，我们有：

$$\text{VaR}(\text{零值})=-W_0R^*=W_0(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}-\mu\Delta t)$$

该方法适用于正态分布及其他累积概率分布函数，只要所有不确定因素包含于 σ 中。其他分布限定了不同的 α 值。由于正态分布充分地代表了许多经验分布，因为最易处理。这一方法尤其适用于样本容量大，分散化程度高的投资组合，但不适用于期权比重较大及金融风险数量较小的投资组合（1.3.2 节的内容来自参考文献 8，供读者参考，不作考试要求。）

1.3.3 VaR 的应用

1. 定量因素的选择。对某资产或资产组合，在给定的持有期和给定的置信水平下，VaR 给出了其最大可能的预期损失。VaR 计算主要涉及两个因素：置信水平和目标时段。目标时段是指我们计算的是未来多长时间内的 VaR，它的确定主要依赖于投资组合中资产的流动性，一般取为 1 天，1 周，10 天或 1 月；置信水平的确定主要取决于风险管理者的风险态度，一般取 90% ~99.9% 。

VaR 通常只是用于提供一个公司标准来比较不同市场上的风险。在这种情况下，因素选择是任意的。例如，信孚银行长期使用 1 年期 99% 的置

信水平 VaR 对不同单位的风险进行比较。假设存在一个正态分布，后面将会说明将离散的银行衡量值转化为一个普通数是非常容易的。

关键是 VaR 的横截面或时间差异。例如，机构投资者想知道一个交易单位的风险是否大于其他交易单位，今天的 VaR 是否与昨天的有关联。如果不是，机构投资者会逐步往下调查风险报告，并查找今天较高的 VaR 是否是因为波动性的增加或投资较大。为了达到这一目的，只要保持一致性，对于置信水平和持有期限的选择影响不大。

（1）置信水平。置信水平 p 越大，那么得出的 VaR 值越大。通过变动置信水平可以为我们提供很多关于收入分布和潜在极端损失的信息。但是，应该在怎样的程度停止，99%，99.9%，99.99%，并不是很明确。在这些置信水平下，计算出的 VaR 值将会逐渐增加。

另一个问题是，当置信水平 p 增加时，大于 VaR 的损失事件的数目就会减少，这样就会造成对这些发生概率小但损失数目大的损失事件的度量不准确。例如，我们有 1 000 个观测值，那么在 99% 的置信水平下 VaR 就是第 10 个最低的观测值。如果置信水平变为 99.9%，那么 VaR 就是最低的那个观测值。最后，在这个样本中，我们没有办法计算 99.99% 置信水平下的 VaR 值。

对于置信水平的选取依赖于我们计算 VaR 的目的。在大多数的情况下，VaR 都被用来做度量不利情形下风险的工具。如此一来，在不同时期及不同交易部门保持置信水平相互一致就显得尤为重要了。

相反地，如果 VaR 值被用来计算应该准备多少资本来防止破产，那么建议使用较高的置信水平。很显然，金融机构非常不希望看到破产的发生。但是，这种资本充足率的要求被应用整个金融机构而不是单个部门。

另一个重要的问题就是，VaR 只能在被验证是正确的情形下使用。这就是事后测试的目的。事后测试系统的检验，是否超出 VaR 值的损失事件的发生概率与 $1-p$ 吻合。在这种目的下，风险经理不应当将 p 的值选得太高。例如，如果选取 $p=99.99\%$，那么超出 VaR 的损失事件将会在 10 000 个交易日中发生一次，或者说 40 年发生一次。换句话说，我们很难验证与 VaR 相联系的这个概率是否的确是 99.99%。

由于以上这些原因，我们通常选取一个不太高的置信水平，如 95%～99%。

（2）时间段。时间段越大，我们计算出的 VaR 值越大。这个推断依赖于两个因素，风险因素和投资组合头寸。

要想以 1 天为时间段推断出更长时间段的 VaR 值，我们必须假设收益是独立同分布的。这使得我们可以通过将一天的波动率乘以时间的平方根来得到多日的波动率。我们还必须假设每日收益的分布在更长的时间段下是不变的，这个约束实际上使得分布是稳态的。正态分布就是一种稳态分

布。如果是这样的话，我们得到：

$$\text{VaR}(T\text{ 天}) = \text{VaR}(1\text{ 天}) \times \sqrt{T}$$

这要求了：①分布在同一时间段内是不变的；②不同时间段下的分布是相同的；③每日的波动是独立的。

对时间段的选取还依赖于投资组合的特性。如果组合中的头寸变化非常快，或者当标的资产价格变动时风险暴露变化，那么增加时间段长度将会引起 VaR 度量的错位。

另外，时间段的选取依赖于计算 VaR 值的目的。如果使用 VaR 的目的是准确地计算不利情形下的风险，那么应当采用较小的时间段。理论上这个间隔应当小于组合中的头寸价值变化的平均时间。

相反，如果 VaR 值被用来计算应该计提多少资本来防止破产，那么建议使用较大的时间段，当问题发生的时候，金融机构往往希望有更充足的时间来争取正确的行动。

在实践中，时间段不可能小于收入和损失报告的频率。一般来说，银行会每日计算损益值，而一般公司的时间就较长（从一天到一个月不等）。这个间隔就是计算 VaR 能够采取的最小的时间段。

另一个标准与事后测试有关。此外，短一点的时间段可以用更多的数据点来验证计算出来的 VaR 值是否正确。由于样本个数的增加可以大大提高统计检验的准确性，所以建议使用尽可能短的间隔。

由于以上的原因，通常建议选取尽可能短的时间段，如交易部门可以选择 1 天作为时间段。选取的时间段应当与资产的种类以及风险管理的目的吻合。对于一些金融机构，如养老基金，1 个月的时间段较为合适。

为了保证资本充足的目的，金融机构应当选择高的置信水平和长的时间段。但在两者之间存在着取舍关系，提高任何一个都会增加 VaR 值。

（3）巴塞尔规定。巴塞尔委员会的市场风险资本要求计算 VaR 时使用以下参数：① 时间段为 10 个交易日或者两周；② 置信水平为 99%；③ 必须有至少一年的历史数据，而且历史数据必须至少每个季度更新一次。

巴塞尔委员会允许 10 日的 VaR 值是从 1 日的 VaR 值推导得出的。因此有：

$$\text{VaR}_t(10, 99\%) = \sqrt{10} \times \text{VaR}_t(1, 99\%)$$

如果金融机构发生问题，那么 10 天的时间就对应着银行管理者采取弥补措施的时间。同样地，99% 置信水平对应着较低的银行由于市场风险而失误的概率。即使这样，百分之一的失败概率对于银行来说仍然过于高。一年中有 52 个星期，也就是有 26 个时间段。那么一次失败可以被预期在

100/26 = 3.8 年内发生，这对银行来说过于高了。所以，巴塞尔委员会使用了一个大于 3 的乘子 k 来进一步确保银行的安全。

1.3.4　VaR 的优缺点

VaR 方法在全球金融风险管理中得到了大力推广。较之以往的风险度量技术，VaR 方法具有诸多的优点：

1. VaR 技术可以在事前计算投资组合的风险，而不像以往的风险管理方法都是在事后衡量投资组合风险的大小。VaR 方法以其高度的综合、概括能力，为投资者提供了一个直观、全面的风险量化指标。投资者可以运用 VaR 方法，动态地评估和计量其所持有的资产组合的风险，及时调整投资组合，以分散和规避风险，提高资产营运质量和运作效率。

2. VaR 方法可以涵盖影响金融资产的各种不同市场因素，同时该方法也可以测度非线性的风险问题。此外，VaR 方法不仅能计算单个金融工具的风险，还能计算由多个金融工具组成的投资组合风险，对此以往的风险管理方法无法实现。

因此，2001 年的巴塞尔委员会指定 VaR 模型作为银行标准的风险度量工具。但是 VaR 模型只关心超过 VaR 值的频率，而不关心超过 VaR 值的损失分布情况，且在处理损失符合非正态分布（如厚尾现象）及投资组合发生改变时表现不稳定。VaR 是一个非常有用的概括风险的方法。但是在使用时，也有一些需要注意的问题。

1. VaR 并没有给出最坏情形下的损失。VaR 方法的设计目的就不是度量这样的损失。事实上，我们可以预期损失将会以概率 $1-p$ 超过 VaR 值，如果置信水平是 95% 的话，就是说 100 天中会有 5 天损失超过 VaR 值。在实际中，我们用事后测试来检验超出 VaR 值的损失频率是否与 $1-p$ 吻合。

2. VaR 并没有给出损失的尾分布的描述。它仅仅说明了这个值发生的概率，而没有提供任何关于损失分布的尾部信息。但是，对于同样的一个 VaR 值，我们可以有两个非常不同的损失分布。VaR 是指在给定的置信水平和投资期内投资组合可能遭受的最大损失。可见，VaR 本质上只是对应于某置信水平的分位点，故又称为分位点 VaR。因此它无法考察分位点下方的信息，即所谓的左尾损失，这就是 VaR 尾部损失测量的非充分性。VaR 方法的这一缺点使人们忽略了小概率发生的巨额损失事件甚至是金融危机，而这又恰恰正是金融监管部门所必须重点关注的。例如，假设有两个投资组合 A、B，它们的投资损失分布风险是不同的。组合 B 发生极端损失的概率远大于投资组合 A 发生的概率，即组合 B 的风险更大。然而用 95% 置信水平的 VaR 来衡量两个投资组合的风险状况时，两者是相同的，

这就给投资者一个错误的风险信息，进而可能误导投资者选择高风险的投资。

3. VaR 的度量结果存在误差。VaR 值会受到样本变化的影响。如果我们使用不同时期的数据，或者改变抽样时期的长度，我们都会得到不同的 VaR 值。不同的统计方法或者不同的简化都会导致不同的 VaR 值。可以通过试验发现，样本时期长度以及使用的统计方法都可以影响 VaR 的精度。

4. VaR 方法不满足次可加性，不符合一致性风险度量方法的要求。一致性风险度量方法的要求在第四节详细阐述。

经证明，VaR 方法在资本收益率不服从正态分布时，缺乏次可加性，因此也就不是一致性风险度量，用 VaR 方法来度量风险就不再准确。例如，资产组合的 VaR 值会大于组合中各项资产的 VaR 值之和，这不仅与投资上要求分散化以降低风险的要求背道而驰，进一步来说，也阻碍了金融机构进行总体风险的有效管理。

另外，VaR 方法衡量的主要是市场风险，如单纯依靠 VaR 方法，就会忽视其他种类的风险如信用风险。所以在金融风险管理中，VaR 方法并不能涵盖一切，仍需综合使用各种其他的定性、定量分析方法。亚洲金融危机还提醒风险管理者：风险价值法并不能预测到投资组合的确切损失程度，也无法捕捉到市场风险与信用风险间的相互关系。

§1.4 CTE 风险度量及其他风险度量

1.4.1 CTE（Conditional Tail Expection）

1. CTE 的定义。VaR 风险度量评估了“最坏情况”的损失，而这种分位数风险度量的缺点则是它并没有考虑当最坏损失发生时损失的大小。超出分位数的损失分布并不影响风险度量。尾条件期望 CTE 克服了分位数风险度量的这些问题。VaR 定义中可以看出，它并没有给出巨大风险严重性的任何信息，VaR 风险度量的这一缺点使人们忽略了小概率发生的巨额损失事件甚至是金融危机，因此学者们改进了 VaR 风险度量。

这种风险度量方法几乎同时被一些研究人员提出，所以它还被称为尾部风险价值、尾部条件期望，我们这里称为尾条件期望。

和分位数风险度量类似，尾条件期望也是在置信水平 p 下定义的，p 取 90%，95%，99%。

定义 1－4 尾条件期望（CTE）是指在正常市场条件下和一定的置信水平 p 上，测算出在给定的时间段内损失超过 Q_p 的条件期望值。

一般来说，如果损失分布是连续的（至少对于大于相关分位数的值来说是连续的），那么，条件尾部期望可用如下公式进行计算：

$$\mathrm{CTE}[X;\ p]=E[X\mid X>\mathrm{VaR}[X;\ p]] \tag{1.4.1}$$

直观上看到 CTE 给出了当损失超过它的 VaR 值时的损失大小的数学期望，它反映了损失超过 VaR 部分的相关信息，因此，其对损失分布的尾部损失度量是相对充分和完整的，尤其在损失分布并非正态分布的情况（如厚尾，偏斜等）中，能更全面有效地刻画损失分布的数理特征。不过也看到 CTE 值是很难计算的，在定义中其涉及 VaR 这个参数，只有把大于 VaR 的所有尾部损失进行充分估计，才能用来计算 CTE 值，但 CTE 的模型研究现在也只是处于起步阶段，技术还不完善，所以在实际中应用较少。

对于非负损失 X，有：

$$\mathrm{CTE}_p=\frac{1}{1-p}\int_{Q_p}^{\infty}yf(y)\,dy=\frac{1}{1-p}\left\{\int_0^{\infty}yf(y)\,dy-\int_0^{Q_p}yf(y)\,dy\right\}$$

又因为有限期望函数可以表示为：

$$E[X\wedge Q_p]=E[\min(X,\ Q_p)]=\int_0^{Q_p}yf(y)\,dy+Q_p(1-F(Q_p))$$

$$=\int_0^{Q_p}yf(y)\,dy+Q_p(1-p)$$

因此，在损失分布是连续的情况下，条件尾部期望可以表示为：

$$\mathrm{CTE}_p=\frac{1}{1-p}\{E[X]-(E[X\wedge Q_p]-Q_p(1-p))\}=Q_p+\frac{1}{1-p}\{E[X]-(E[X\wedge Q_p])\}$$

【例 1-6】 离散损失分布。

我们在这里举一个简单的离散随机变量的例子。假设损失随机变量为 X，分布列如图表 1-4 所示。

表 1-4

X	0	100	1 000
P	0.9	0.06	0.04

我们首先来考虑 90% CTE。在本题中，90% 分位数 $Q_{0.90}=0$，并且，对于任意 $\varepsilon>0$ 有 $Q_{0.90+\varepsilon}>Q_{0.90}$，所以我们得到：

$$\mathrm{CTE}_{0.90}=E[X\mid X>0]=\frac{(0.06)(100)+(0.04)(1\ 000)}{0.10}=460$$

也就是说，当给定损失大于损失分布的 90% 分位数的情况下，平均损失为 460。接下来考虑 95% CTE。可以看出 $Q_{0.96}=Q_{0.95}=100$，

同样，我们可以得出 $\mathrm{CTE}_{0.95}=\dfrac{(0.01)(100)+(0.04)(1\ 000)}{0.05}=820$。

2. CTE 与 VaR 的简单比较。

（1）显然有 $CTE_p \geq Q_p$。

（2）$CTE_{0\%}$ 即为损失的均值。

（3）$Q_{0\%}$ 为损失的最小值，$Q_{50\%}$ 是损失的中位数。

（4）p 在 0 与 1 之间取值。

（5）在某些情况下，负值会从计算中剔除，在正态分布的例子中，$p < 0.38$ 时风险价值为 0。对于 CTE，正态分布下值将增加，因为 CTE 定义为 $E[\max(X, 0) \mid X > Q_p]$。

3. 利用蒙特卡洛方法的模拟结果进行分析。假设 $N(1-p)$ 是整数，那么有：

$$CTE_p' = \frac{1}{N(1-p)} \sum_{j=Np+1}^{N} L_{(j)}$$

其中：L 表示损失变量；N 表示模拟次数；$L_{(j)}$ 表示第 j 个次序统计量。

举例来说，表 1－5 的数据是样本量为 1 000 时最坏的 100 个情形。为了估计 95% 条件尾部期望，我们对最坏的 50 个数值求平均值，得到条件尾部期望的估计值 260. 68，而之前计算得到的真实取值为 257. 83。

表 1－5 对 $N(33, 109^2)$ 进行蒙特卡洛模拟，在得到的 1 000 个样本中取最大的 100 个。

表 1－5

$L_{(901)}$	to	$L_{(910)}$							
169.1	170.4	171.3	171.9	172.3	173.3	173.8	174.3	174.9	175.9
$L_{(911)}$	to	$L_{(920)}$							
176.4	177.2	179.1	179.7	180.2	180.5	181.9	182.6	183.0	183.1
$L_{(921)}$	to	$L_{(930)}$							
183.3	184.4	186.9	187.7	188.2	188.5	191.8	191.9	193.1	193.8
$L_{(931)}$	to	$L_{(940)}$							
194.2	196.3	197.6	197.8	199.1	200.5	200.5	200.5	202.8	202.9
$L_{(941)}$	to	$L_{(950)}$							
203.0	203.7	204.4	204.8	205.1	205.8	206.7	207.5	207.9	209.2
$L_{(951)}$	to	$L_{(960)}$							
209.5	210.6	214.7	217.0	218.2	226.2	226.3	226.9	227.5	227.7
$L_{(961)}$	to	$L_{(970)}$							
229.0	231.4	231.6	233.2	237.5	237.9	238.1	240.3	241.0	241.3

续表

$L_{(971)}$ to $L_{(980)}$									
241.6	243.8	244.0	247.2	247.8	248.8	254.1	255.6	255.9	257.4
$L_{(981)}$ to $L_{(990)}$									
265.0	265.0	268.9	271.2	271.6	276.5	279.2	284.1	284.3	287.8
$L_{(991)}$ to $L_{(1\,000)}$									
287.9	298.7	301.6	305.0	313.0	323.8	334.5	343.5	350.3	359.4

【例 1－7】 比较由表 1－5 的蒙特卡洛模拟样本得到的 99% CTE 和 $N(33, 109^2)$ 的真实值。

解： 由样本得到的估计值为 321.8，而真实值为 323.5。

对 CTE 估计的标准差的最常用的估计是 $s_1/\sqrt{N(1-p)}$，这里的 s_1 是最坏模拟损失的标准差：

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{N(1-p)-1}\sum_{j=Np+1}^{N}(L_{(j)} - \mathrm{CTE}_p')^2}$$

$$V[\mathrm{CTE}_p'] = E[V[\mathrm{CTE}_p' \mid \hat{Q}_p]] + V[E[\mathrm{CTE}_p' \mid \hat{Q}_p]]$$

$$s_{\mathrm{CTE}_p}^2 = \frac{s_1^2 + p(\mathrm{CTE}_p' - \hat{Q}_p)}{N(1-p)}$$

在精算应用中，尾条件期望已经成为一种非常重要的风险度量方法。这种方法比较直观，易于理解，并且较分位数而言，对于抽样误差更稳健。尾条件期望被加拿大和美国权益联结寿险用于随机准备金和偿付能力的计算。值得注意的是，既然尾条件期望是在给定损失超出 VaR 下的损失期望值，那么在置信水平为 95% 情况下，尾条件期望较风险价值更为保守。

CTE 不是单一的分位点，这与 VaR 有着本质的区别，CTE 是尾部损失的平均对于尾部损失的估计是充分的，此外，CTE 是一致性的风险度量。

所以，CTE 具有明显的优点：（1）它代表了超额损失的平均水平，反映了损失 VaR 时平均损失的大小，更能体现潜在的风险价值。（2）CTE 的计算通过构造功能函数而化为一个凸性优化问题，必定存在最优解。（3）求CTE 的同时，VaR 也可以同时获得，因此可以对风险实行双重监管。基于上述优点，CTE 术界认为是一种比 VaR 风险计量技术更为合理有效的现代风险管理方法，是近风险评价理论研究的最有前途的课题，所以用 CTE 衡量最优再保险要比 VaR 适应未来的国际金融行业。

4. CTE 具有次可加性（证明略）。

1.4.2 TVaR（Tail Value at Risk）

$$\mathrm{TVaR}[X;\ p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 \mathrm{VaR}[X;\ \xi]d\xi \quad 0<p<1 \tag{1.4.2}$$

当 X 服从连续分布时，尾部风险价值和条件尾部期望是一致的，在此就不再赘述。

值得注意的是，TVaR 模型是满足次可加性的。下面我们进行简单证明，通过变换，我们可以得到：

$$\mathrm{TVaR}[X;\ p] = \inf_{a\in R}\left\{a + \frac{1}{1-p}E[(X-a)_+]\right\}$$

对于任意的 $\lambda\in(0,\ 1)$，有：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{TVaR}[\lambda X + (1-\lambda)Y;\ p] \\
&\leqslant \lambda\mathrm{VaR}[X;\ p] + (1-\lambda)\mathrm{VaR}[Y;\ p] + \frac{1}{1-p}E[(\lambda X + (1-\lambda)Y \\
&\quad - \lambda\mathrm{VaR}[X;\ p] - (1-\lambda)\mathrm{VaR}[Y;\ p])_+] \\
&\leqslant \lambda\mathrm{VaR}[X;\ p] + (1-\lambda)\mathrm{VaR}[Y;\ p] + \frac{\lambda}{1-p}E[(X-\mathrm{VaR}[X;\ p])_+] \\
&\quad + \frac{1-\lambda}{1-p}E[(Y-\mathrm{VaR}[Y;\ p])_+] \\
&= \lambda\mathrm{TVaR}[X;\ p] + (1-\lambda)\mathrm{TVaR}[Y;\ p]
\end{aligned}$$

1.4.3 CVaR（Conditional Value at Risk）

条件风险价值（CVaR）模型是指在正常市场条件下和一定的置信水平 p 上，测算出在给定的时间段内损失超过 Q_p 的条件期望值。

$$\begin{aligned}
\mathrm{CVaR}[X;\ p] &= E[X-\mathrm{VaR}[X;\ p]\mid X>\mathrm{VaR}[X;\ p]] \\
&= \mathrm{CTE}[X;\ p] - \mathrm{VaR}[X;\ p]
\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

CVaR 模型在一定程度上克服了 VaR 模型的缺点，不仅考虑了超过 VaR 值的频率，而且考虑了超过 VaR 值损失的条件期望，有效的改善了 VaR 模型在处理损失分布的后尾现象时存在的问题。当证券组合损失的密度函数是连续函数时，CVaR 模型是一个一致性风险度量模型，具有次可加性，但当证券组合损失的密度函数不是连续函数时，CVaR 模型不再是一致性风险度量模型，即 CVaR 模型不是广义的一致性风险度量模型，需要进行一定的改进。

1.4.4 ES（Expect Shortfall）

ES 模型是在 CVaR 基础上的改进版，它是一致性风险度量模型。如果损失 X 的密度函数是连续的，则 ES 模型的结果与 CVaR 模型的结果相同，如果损失 X 的密度函数是不连续的，则两个模型计算出来的结果有一定差

异，定义为：

$$\mathrm{ES}[X;p]=E[(X-\mathrm{VaR}[X;p])_{+}] \tag{1.4.4}$$

ES 模型对于损失 X 的分布没有特殊的要求，在分布函数连续和不连续的情况下都能保持一致性风险度量这一性质，使该模型不仅可以应用到任何的金融工具的风险度量和风险控制，也可以处理具有任何分布形式的风险源，而且保证了在给定风险量的约束条件下最大化预期收益组合的唯一性。

【例 1－8】 假设有两个面值 100 元，且不同时违约的企业债券 A 和 B，初始值都为 98.9 元，在不同的期末事件发生情况下，这两个债券的支付如表 1－6 所示。

表 1－6

期末事件	A	B	$A+B$	Prob
1	70	100	170	3%
2	90	100	190	2%
3	100	70	170	3%
4	100	90	190	2%
5	100	100	200	90%

从表 1－6 中，我们可以分别计算出债券 A，债券 B，组合 $A+B$，5% 的 VaR 值，如表 1－7 所示。

表 1－7

	A	B	$A+B$
初始值	98.9	98.9	197.8
5% －VaR	8.9	8.9	27.8

在上面的例子中，我们看到债券 A 和 B 的 5% －VaR 值的和小于组合 $A+B$ 的 5% －VaR 值，这将直接导致我们在投资时，不是进行分散性投资，而是把所有的资金投在某一种债券上，这与我们投资理论是明显相矛盾的。这也是我们提出具有一致性的风险度量的原因。

接下来我们采用 ES 模型度量债券 A 和 B，以及组合 $A+B$ 的风险指标，如表 1－8。

表 1－8

	A	B	$A+B$
初始值	98.9	98.9	197.8
5% －VaR	20.9	20.9	27.8

可以看到债券 A 和 B 风险的和大于组合 $A+B$，与分散性投资理论相一致。

1.4.5 风险度量之间的关系

$\forall p \in (0,1)$，有如下关系式：

$$\mathrm{TVaR}[X;\ p] = \mathrm{VaR}[X;\ p] + \frac{1}{1-p}\mathrm{ES}[X;\ p] \tag{1.4.5}$$

$$\mathrm{CTE}[X;\ p] = \mathrm{VaR}[X;\ p] + \frac{1}{\bar{F}_X(\mathrm{VaR}[X;\ p])}\mathrm{ES}[X;\ p] \tag{1.4.6}$$

$$\mathrm{CVaR}[X;\ p] = \frac{\mathrm{ES}[X;\ p]}{\bar{F}_X(\mathrm{VaR}[X;\ p])} \tag{1.4.7}$$

1.4.6 失真风险度量

失真风险度量是用损失的生存函数来定义的，生存函数即为 $S(x)=1-F(x)$。失真风险度量可以被表示为如下形式：

$$\rho_g(X) = -\int_{-\infty}^{0}(1-g(S(x)))dx + \int_{0}^{\infty}g(S(x))dx \tag{1.4.8}$$

其中，$g(\cdot)$是非降函数，并且 $g(0)=0$，$g(1)=1$。

函数 $g(\cdot)$被称为失真函数。这种方法对损失发生的概率进行了重新安排，增加了较大损失的权重。函数 $g(S(x))$称为风险调整生存函数。

在这里，我们只考虑损失取非负值的情况，那么，失真风险度量为：

$$\rho_g(X) = \int_0^{\infty}g(S(x))dx$$

也称为 Wang 风险度量。

同时，我们注意到：

$$\rho_g(X) = \int_0^{\infty}g(S(x))dx = \int_{x=0}^{+\infty}\int_{p=0}^{S(x)}dg(p)dx = \int_{p=0}^{1}\int_{x=0}^{S^{-1}(p)}dg(p)dx$$

$$= \int_0^1 \mathrm{VaR}[X;\ 1-p]dg(p)$$

上式对于失真风险度量的性质证明是非常重要的。

通过简单证明，我们可以得到 Wang 风险度量具有无过多附加、正齐次性、平移不变性、同单调可加性。当 $g(\cdot)$为凹函数时，Wang 风险度量具有次可加性。

风险价值和条件尾部期望均可归为失真风险度量的一种。它们是目前为止应用最为广泛的失真风险度量，主要用于资本充足率的研究，也用于财产和意外伤害险的费率厘定。

当失真函数为 $g(S(x)) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } 0 \leqslant S(x) \leqslant 1-\alpha \\ 1 & \text{如果 } 1-\alpha < S(x) \leqslant 1 \end{cases}$，我们便得到风险

价值；

当失真函数为 $g(S(x))=\begin{cases}S(x)/(1-\alpha) & \text{如果 } 0\leqslant S(x)\leqslant 1-\alpha \\ 1 & \text{如果 } 1-\alpha<S(x)\leqslant 1\end{cases}$，我们便得到尾条件期望。

1.4.7　一致性风险度量

前面介绍了众多的风险度量方法，那么在所有这些风险度量方法中如何进行选择呢？建立评定风险度量方法有效性的标准是非常重要的。Artzner et al.（1997，1999）提出了一致性风险度量模型，阐述了人们希望风险度量方法具备的性质。

这些性质包括：

1. 平移不变性（Translation Invariance）。对于任意常数 c，$\rho(X+c)=\rho(X)+c$，这意味着对于风险增加常数值，风险度量也增加相同值。这也表明对于常数损失 c，风险度量得到的即为损失 c 的取值。

2. 正齐次性（Positive Homogeneity）。对于任意常数 $\lambda>0$，$\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X)$，这条性质表明，改变损失的单位并不影响风险度量。

3. 次可加性（Subadditivity）。对于任意的随机损失 X 和 Y，有 $\rho(X+Y)\leqslant\rho(X)+\rho(Y)$，次可加性的要求是很直观的，当风险被分开为不同组成部分时，所需的经济资本是不可能减少的。换句话说，分散化不可能使得风险变大，当风险不是完全正相关时反而会使得风险减小。

4. 单调性（Monotonicity）。如果 $\Pr(X\leqslant Y)=1$，那么有 $\rho(X)\leqslant\rho(Y)$，直观上来看，如果一种风险常常比另外一种风险大，那么风险度量应该有相同的大小序关系。

当风险度量同时具备单调性和平移不变性时，风险度量不会小于最小损失值，也不会大于最大损失值。这个证明是显然的。用 Y 的最小值 $\min Y$ 替换 X，有 $\Pr(\min Y\leqslant Y)=1$，因此，根据平移不变性，我们得到 $\rho(\min Y)\leqslant\rho(Y)$。

当一个风险度量满足上述四条性质时，我们称其是一致的。自从 Artzner 提出了一致性公理以后，能否满足该公理即成为一种风险计量方法是否可用的判断标准。在上述四个条件中，次可加性是最为重要的。次可加性意味着投资组合的风险值不超过其各个组成部分的风险值之和。当各个部分的风险完全相关时，整体风险等于各个部分风险之和。否则由于风险散化效应，整体风险将小于部分风险之和。但是经证明，风险价值 VaR 不是一致的，因为它不具备次可加性。我们下面通过一个简单的例子来说明。

假设我们有两个损失随机变量分别为 X 和 Y，它们均依赖于随机变量 U，而 U 服从（0，1）上的均匀分布。

$$X=\begin{cases}1\ 000 & \text{如果 } U\leqslant 0.04\\ 0 & \text{如果 } U>0.04\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0 & \text{如果 } U\leqslant 0.96\\ 1\ 000 & \text{如果 } U>0.96\end{cases}$$

设 $\rho(X)$95%分位数风险度量，那么 $\rho(X)=\rho(Y)=0$。这是因为，X 和 Y 取非零值的概率均小于5%。另一方面，$X+Y$ 取非零值的概率为8%。

$$\rho(X+Y)=1\ 000>\rho(X)+\rho(Y)=0$$

风险价值法不满足次可加性，因此也就不是一致性风险度量。次可加性条件保证了组合的风险小于等于构成组合的每个部分风险的和，这一条件与我们进行分散性投资可以降低非系统风险相一致，是一个风险度量模型应具有的重要的属性，在实际中也具有重要的意义：

首先，次可加性在银行的资本金确定上具有重要意义，如某银行有很多支行组成，每个支行根据自己的风险分别计算自己的资本金需求数量，则该银行总的资本金需求量会小于等于每个支行的资本金需求量之和。

其次，次可加性条件在我们求解最优化组合中也具有重要的意义，在该条件下求解最优化组合的问题变成了一个凸规划，它的解具有存在唯一性。

因此，我们特别注重风险度量是否满足次可加性条件。

习　题

1. 我们得到某公司的年度收益率数据如下：22%，5%，−7%，11%，2%，11%，求该样本的标准差。

2. 某公司成功推出新产品的概率是20%，试求200个新产品推出的过程中成功个数的标准差，假设服从二项分布。

3. 对于一个由10支股票组成的投资组合，通过对个体股票的基础分析估计，我们可以得到组合的期望收益率是14%，标准差为25%，β 值为1.1。市场组合的期望收益率为12.5%，标准差为20.2%。无风险收益率为2.6%。计算该投资组合的Treynor度量值、Sharpe度量值、Jensen's alpha。

4. 对于1.3中给定的条件，计算市场组合的Treynor度量值、Sharpe度量值、Jensen's alpha。

5. 对于某一给定的投资组合，期望收益率为9%，标准差为16%，β 值为0.8。市场组合的期望收益率为12%，标准差为20%。无风险收益率为3%。求该投资组合的Jensen's alpha值。

6. 假设损失 X 服从分布：

X	100	50	10	0
P	0.005	0.045	0.10	0.85

求该损失分布的95%，90%，80%分位数。

7. 设损失 X 服从正态分布 $N(33, 109^2)$，求该损失分布的99%分位数。

8. 设损失 Pareto 分布，其密度函数为 $f(x)=r\theta^r/(\theta+x)^{r+1}$，且均值为33，方差为 109^2，试确定该分布的95%分位数、99%分位数。

9. 对于上题给出的 Pareto 分布，试得出 CTE 的公式，并且计算 95% CTE、99% CTE 的值。

10. 对于例 1-5 中介绍的对数看跌期权的例子，求 80% CTE。

11. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $\text{TVaR}[X; p]$。

12. 设 $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$，求 $\text{TVaR}[X; p]$。

13. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $\text{ES}[X; p]$。

14. 设 $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$，求 $\text{ES}[X; p]$。

15. 假设损失 X 服从正态分布 $N(33, 109^2)$，求 95% CTE（提示：在连续分布下，95% CTE 即为 $E[X \mid X > Q_{0.95}]$）。

16. 在15题条件下，求99% CTE。

17. 假设标的股票价格服从对数正态分布，那么对数正态看跌期权的5%最坏情形对应于到期时刻标的股票的价格低于5%分位数的情形。设股票到期价格为 S_{10}，Q_p 表示 S_{10} 分布的 p 分位数。求 95% CTE。

18. 在17题条件下，求99% CTE。

第二章　非寿险精算中的统计方法

学习目标

- ☐ 掌握常用的损失理论分布及其数字特征，学会根据损失数据，运用各种统计推断方法，拟合损失分布
- ☐ 掌握贝叶斯估计的基本方法，学会根据损失数据，对先验信息作修正，得到损失后验分布
- ☐ 掌握随机模拟基本方法，学会对损失理论分布作随机模拟，以取得满足精算需要的损失模拟数据
- ☐ 掌握信度理论的基本方法，学会对风险非同质的识别，了解信度理论与贝叶斯估计的关系，为第四章学习作必要的知识准备

§2.1　损失分布的拟合方法

2.1.1　损失理论分布

风险与损失都是非寿险精算的重要概念。

非寿险的损失可以理解为保险事故的损失，即被保险人的损失；也可以理解为被保险人因保险事故而向保险人提出的索赔额，即被保险人希望向保险人转嫁的损失；又可以理解为保险人根据保险合同最后向被保险人的赔款，即保险人的损失。严格地说，这三个概念之间有着密切联系，但又是不完全相同的。

由于非寿险精算师讨论和研究损失，归根结底是为了根据损失去厘定保费、提取准备金和安排再保险，这里的损失应该是指保险人的最终损失，所以我们更倾向于对损失概念的第三种理解。本教材除非特别说明，所称损失都是指保险人的赔款。

决定损失大小的，有两个要素：一是损失次数，即赔款次数；二是损失金额，即赔款额。这两个量都是随机变量。讨论这两个随机变量的分布和特征，是这个小节的主要任务。

1. 常用的损失次数理论分布。损失次数是个离散型随机变量，常用来作为损失次数的理论分布有：泊松分布、二项分布、负二项分布。

（1）泊松（Poisson）分布。泊松分布是一个取非负整数值的离散型随机变量的分布，常用来描述小概率发生事件的次数。在非寿险精算中，泊

松分布是赔款发生次数概率分析最常用的一种分布。

泊松分布的分布列为：

$$P(N=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\quad \lambda>0,\ k=0,\ 1,\ 2\cdots$$

泊松分布的数学期望和方差为：

$$E(N)=\mathrm{Var}(N)=\lambda$$

以时间 t 为参数的泊松分布随机变量 $N(t)$ 就是泊松随机过程。用泊松分布随机变量来描述危险单位在单位时间的赔款次数是合适的。

另外，泊松分布的可加性，可以用来刻画总损失的分布。

（2） 二项分布。二项分布又称贝努利分布，也是用来描述赔款次数的一个重要分布。

设某一险种承保 n 个保险标的，且每一标的在保险期内只有发生赔款或不发生赔款两种结果。令 X_i 表示取值 0 或 1 的随机变量。当 $X_i=1$ 时，表示第 i 个标的发生赔款，当 $X_i=0$ 时，表示第 i 个标的不发生赔款，则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 表示 n 个保险标的在保险期限内发生赔款的次数。如果各标的发生赔款的事件是相互独立的，且每一标的发生赔款的概率是相同的，即 $P(X_i=1)=p(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则 n 个标的中有 k 个发生赔款的概率为：

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

上述分布称为二项分布。

二项分布的数学期望和方差分别为：

$$E(X)=np$$

$$\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$$

二项分布是个双参数的分布，它的极限分布则是单参数的泊松分布。

二项分布的概率可用其极限分布——泊松分布来近似计算。当 n 很大，而 p 很小时（一般 $n\geqslant 10$，$p\leqslant 0.1$ 时），泊松分布能以较高的精度近似二项分布。

另外，也可把二项分布随机变量看作相互独立，而且是服从二点分布随机变量的和，利用中心极限定理可得：当 n 充分大时，$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从标准正态分布。一般来说，在 np 和 $np(1-p)$ 都大于 10 时，近似程度也不错。

（3） 负二项分布。负二项分布常用于灾害事故和发病情形的统计问题，在非寿险精算中经常用来描述在风险不同质情况下赔款发生次数的分布。

在一组贝努利试验（试验只有两个结果成功或不成功）里，当第 k 次试验成功时，试验不成功次数 X 的分布，称为负二项分布。

其分布列为：

$$P(X=x)=C_{x+k-1}^{x}p^{k-1}p\ (1-p)^{x}=C_{x+k-1}^{x}p^{k}\ (1-p)^{x}\quad (x=0,\ 1,\ 2\cdots)$$

其中 p 是每次试验成功的概率。

负二项分布的数学期望和方差分别为：

$$E(X)=\frac{k(1-p)}{p}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{k(1-p)}{p^{2}}$$

特别地，当 $k=1$ 时的负二项分布就是几何分布，即贝努利试验中首次成功前，失败次数的分布。几何分布的分布列为：

$$P(X=x)=p\ (1-p)^{x}\quad (x=0,\ 1,\ 2\cdots)$$

几何分布的数学期望和方差分别为：

$$E(X)=\frac{1-p}{p}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{1-p}{p^{2}}$$

在非寿险精算中，负二项分布常用于研究风险非同质情况下赔款次数的分布。例 2－1 涉及了条件概率、条件分布和全概率公式等概率论基本概念和公式，需要的读者可以查阅任何一本概率论教材。

【例 2－1】 设某险种的个别保单在保险期内的赔款次数 N 服从参数为 Λ 的泊松分布，但由于每张保单的风险状况不同，所以 Λ 也是一个随机变量，且服从 Gamma(α,β)，试求 N 的分布。

解： 由连续型随机变量的全概率公式，

$$\begin{aligned}P(N=n)&=\int_0^{\infty}P(N=n\mid\Lambda=x)f(x)dx\\&=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}x^{n}}{n!}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx\\&=\frac{\beta^{\alpha}}{n!\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}x^{\alpha+n-1}e^{-(\beta+1)x}dx\\&=\frac{\beta^{\alpha}}{n!\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\beta+1)^{\alpha+n}}\int_0^{\infty}\frac{(\beta+1)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n)}x^{\alpha+n-1}e^{-(\beta+1)x}dx\\&=\frac{\beta^{\alpha}}{n!\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\beta+1)^{\alpha+n}}\\&=C_{\alpha+n-1}^{n}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{n}\quad n=0,\ 1\cdots\end{aligned}$$

即 N 服从 $k=\alpha$，$p=\dfrac{\beta}{\beta+1}$的负二项分布。

2. 常用的损失额理论分布。损失额是连续型随机变量，其分布一般具有非负、右偏、长尾巴的特点。具备这些特点的连续型分布如对数正态分布、帕累托分布、伽玛分布等常用来作为损失额的理论分布。

（1）对数正态分布。非寿险的许多险种中的赔款额分布可用对数正态分布来描述，如汽车保险、工程保险、火灾保险等。

若随机变量 X 的对数函数 $Y=\ln X\sim N(\mu, \sigma^2)$，则称 X 服从以 μ，σ^2 为参数的对数正态分布，记作 $X\sim LN(\mu, \sigma^2)$。

对数正态分布的密度函数为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

X 的数学期望和方差分别为：

$$E(X)=e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})}$$

$$\mathrm{VaR}(X)=e^{(2\mu+\sigma^2)}(e^{\sigma^2}-1)$$

对数正态分布的随机变量经过对数变换后可用正态分布进行计算。

【例 2－2】 根据过去的经验，某保险公司汽车险的赔款额服从对数正态分布，其中平均赔款额为 5 000 元，标准差为 7 500 元，试估计一次赔款在 8 000 元和 2 万元之间的赔案在全部赔案中占多大的概率。

解： 由题知

$$e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})}=5\ 000 \tag{1}$$

$$e^{(2\mu+\sigma^2)}(e^{\sigma^2}-1)=7\ 500^2 \tag{2}$$

由（1）、（2）解得：

$$\mu=7.9279$$

$$\sigma^2=1.1787$$

所以一次赔款额在 8 000 元和 20 000 元之间的概率为：

$$\begin{aligned}P(8\ 000<X<20\ 000)&=P(\ln 8\ 000<\ln X<\ln 20\ 000)\\&=P\left(\frac{8.9872-7.9279}{\sqrt{1.1787}}<\frac{\ln X-7.9279}{\sqrt{1.1787}}<\frac{9.9035-7.9279}{\sqrt{1.1787}}\right)\\&=\Phi(1.8197)-\Phi(0.9757)\\&=0.9656-0.8365\\&=0.1291\end{aligned}$$

（2）帕累托（Pareto）分布。帕累托分布也常用来反映非寿险公司遭受损失的分布。帕累托分布的概率密度曲线呈右偏斜。但其尾部趋于零的速度要比对数正态分布慢得多，因此可以用帕累托分布估计特大赔付的再保险费率。

帕累托分布有三种形式：简单参数帕累托分布、一般帕累托分布和广义帕累托分布。

简单参数帕累托分布（Single Parameter Pareto）的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta}(\frac{\beta}{x})^{\alpha+1} & x>\beta \\ 0 & x\leqslant\beta\end{cases}$$

X 的 k 阶矩为：

$$E(X^k)=\frac{\alpha\beta^k}{\alpha-k} \quad k<\alpha$$

所以当 $\alpha>1$ 时，简单参数帕累托分布的数学期望存在

$$E(X)=\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$$

当 $\alpha>2$ 时，简单参数帕累托分布的方差存在

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\beta^2}{\alpha-2}(\frac{\alpha\beta}{\alpha-1})^2$$

一般帕累托分布的概率密度函数为：

$$f(x)=\frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} \quad x>0$$

X 的 k 阶矩为：

$$E(X^k)=\frac{\beta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)} \quad -1<k<\alpha,$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数。

所以当 $\alpha>1$ 时，一般帕累托分布的数学期望存在

$$E(X)=\frac{\beta}{\alpha-1}$$

当 $\alpha>2$ 时，一般帕累托分布的方差存在

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$

广义帕累托分布的概率密度函数为：

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+k)\beta^\alpha x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)(\beta+x)^{\alpha+k}} \quad x>0$$

X 的 r 阶矩为：

$$E(X^r)=\frac{\beta^k\Gamma(k+r)\Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \quad -k<r<\alpha$$

所以当 $\alpha>1$ 时，帕累托分布的数学期望存在

$$E(X)=\frac{\beta k}{\alpha-1}$$

当 $\alpha>2$ 时，帕累托分布的方差存在

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{(\alpha+k-1)k\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$

【例 2－3】 设某项业务的赔款额服从均值为 1 000 元，标准差为 1 500 元的一般 Pareto(α,β) 分布（密度函数为 $f(x)=\frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}}$），赔付率为

0.05。现安排一超额损失再保险合同，根据合同，再保险公司承担超过 2 000 元的损失赔付责任，求 2 000 份此类再保险单的再保险纯保费。

解： 由题得

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta + t)^{\alpha+1}}dt$$

$$= \int_\beta^{x+\beta} \frac{\alpha\beta^\alpha}{s^{\alpha+1}}ds$$

$$= \alpha\beta^\alpha \frac{(\beta + x)^{-\alpha} - \beta^{-\alpha}}{-\alpha}$$

$$= 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha$$

$$\begin{cases} E(X) = \dfrac{\beta}{\alpha - 1} = 1\ 000 \\ \mathrm{Var}(X) = \dfrac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} = 1\ 500^2 \end{cases}$$

得$\begin{cases} \alpha = 3.6 \\ \beta = 2\ 600 \end{cases}$

再保险人承担的平均损失额为：

$$\int_{2\ 000}^{+\infty} x \frac{3.6 \times 2\ 600^{3.6}}{(2\ 600 + x)^{4.6}}dx - 2\ 000\left(\frac{2\ 600}{4\ 600}\right)^{3.6} = 226.86(\text{元})$$

其中 $\int_{2\ 000}^{+\infty} x \frac{3.6 \times 2\ 600^{3.6}}{(2\ 600 + x)^{4.6}}dx$ 表示损失 x 大于 2 000 元时的平均损失，

$$P(X > 2\ 000) = \left[\frac{2\ 600}{4\ 600}\right]^{3.6}$$

所以，再保险纯保费为 $2\ 000 \times 226.86 \times 0.05 = 22\ 686$ 元。

（3）伽玛（Gamma）分布。伽玛分布也是非寿险精算中常用的连续型分布，常用来描述赔款额的分布和分析风险的非同质性。

伽玛分布的概率密度函数为：

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}x^{\alpha-1} \quad x > 0$$

其中，$\alpha, \beta > 0$，$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

$\Gamma(\alpha)$称为伽玛函数，有以下性质：

（1）$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$；

（2）$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$；

（3）当 $\alpha > 0$ 时，$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$；

（4）当 α 为正整数时，$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

伽玛分布的 k 阶矩为：

$$E(X^k)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\beta^k\Gamma(\alpha)}$$

所以伽玛分布的数学期望和方差分别为：

$$E(X)=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{Var}(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$$

伽玛分布的偏度系数 $\beta_1=\dfrac{E(X-E(X))^3}{[E(X-E(X))^2]^{\frac{3}{2}}}$

因为，$E(X-E(X))^3=E(X^3)-3E(X^2)E(X)+2(E(X))^3$

$$=\frac{\Gamma(3+\alpha)}{\beta^3\Gamma(\alpha)}-\frac{3\Gamma(2+\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\beta^2\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}+2\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)}\right)^3$$

$$=\frac{(2+\alpha)(1+\alpha)\alpha}{\beta^3}-\frac{3(1+\alpha)\alpha^2}{\beta^3}+\frac{2\alpha^3}{\beta^3}$$

$$=\frac{2\alpha}{\beta^3}$$

所以，$\beta_1=\dfrac{\dfrac{2\alpha}{\beta^3}}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$

而伽玛分布的变异系数为：

$$k=\frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}=\frac{\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta^2}}}{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

所以伽玛分布的偏度系数是变异系数的 2 倍。

特别地，当 $\alpha=1$ 时，伽玛分布就是以 β 为参数的指数分布，这时它的密度函数 $f(x)$ 从 0 处的最大值开始单调递减。

当 $\alpha>1$ 时，$f(x)$ 从 0 单调递增至极大值，然后再单调递减。

当 $\alpha<1$ 时，$f(x)$ 单调递减。

3. *其他一些右偏斜的连续型分布*。用对数正态分布、帕累托分布、伽玛分布作为损失额的分布是最常用的方法。有时我们也可以取一些其他的右偏斜分布来作为损失额的分布。这些分布有对数伽玛分布、韦伯分布以及 χ^2 分布。

（1）对数伽玛分布。若随机变量 X 的对数函数 $Y=\ln X\sim \text{Gamma}(\alpha,\beta)$，则称 X 服从以 α，β 为参数的对数伽玛分布。

对数伽玛分布的密度函数为：

$$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}(\ln x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)x^{\beta+1}}$$

对数伽玛分布的数学期望和方差分别是：

$$E(X)=\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{\alpha}$$

$$\operatorname{Var}(X)=\left(\frac{\beta}{\beta-2}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{2\alpha}$$

（2）韦伯（Weibull）分布。韦伯分布的密度函数为：

$$f(x)=c\gamma x^{\gamma-1}e^{-cx^{\gamma}}\quad x>0$$

韦伯分布的数学期望和方差分别是：

$$E(X)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{c^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$\operatorname{Var}(X)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)}{c^{\frac{2}{\gamma}}}-\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{c^{\frac{1}{\gamma}}}\right)^{2}$$

（3）χ^2 分布。如果 X_i 独立同分布，且 $X_i\sim N(0,1)\ i=1,2,\cdots,n$，则 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从 $\chi^2(n)$，其密度函数为：

$$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}\quad x>0$$

$$\chi^2(n)=\operatorname{Gamma}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$\chi^2(n)$分布的数学期望和方差分别是：

$$E(X)=n$$

$$\operatorname{Var}(X)=2n$$

还有一些衍生的连续型分布含有更多的参数，也可被精算师用来描述损失额的分布。如：变换伽玛（Transformed Gamma）分布、逆变换伽玛（Inverse Transformed Gamma）分布、变换贝塔（Transformed Beta）分布、逆高斯（Inverse Gaussian）分布等。

非寿险精算师之所以重视研究损失的理论分布，是因为用理论分布对损失进行数量分析具有明显的优越性：它可以用很少的几个参数（数字特征）概括损失分布的特征，简化计算；它具有良好的分析性质，能充分运用微积分等数学工具；它还能用来推断非寿险公司的未满期责任或者计算再保险的费率等。因此，即使在经验数据很充足的情况下，有些场合还是需要用理论分布进行分析。

2.1.2 损失分布参数估计与假设检验

损失理论分布的参数反映了损失随机变量的数字特征。运用损失的经验数据估计损失理论分布的参数，是损失分布拟合的前提。根据统计理论，这里的损失理论分布就是总体分布，待估参数就是总体参数，而经验数据，就是样本观测值。

1. 点估计方法。非寿险精算师可运用如下方法对损失分布参数进行估计。

（1）矩法估计。参数估计的矩方法建立在样本矩概念的基础之上。

我们把通过观测得到的损失数据 x_1，x_2，…，x_n 看作为损失随机变量 X 的一个容量为 n 的样本，把 $\overline{x^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ 称为样本的 k 阶原点矩。

类似地，还可以定义样本的 k 阶中心矩。

矩法估计的基本思想是：如果随机变量 X 的理论分布有 k 个未知参数，那么它们一定包含在 X 的各阶矩 $E(X^i)$ 之中。所谓矩法估计就是用样本矩作为随机变量 X 的同类同阶矩的估计，从中得到各个参数的估计值。具体方法是：先建立由 k 个方程组成的矩方程组：$\overline{x^i} = E(X^i)$，$i=1, 2, \cdots, k$，然后从中解出 k 个未知参数。

在利用分组数据计算样本矩时，我们常用各组组中值（即（各组上限＋下限）/2）x_i 作为各组观测值的代表值（当观测值在各组呈均匀或对称状分布时，如此假设是合理的），如果同时用 f_i 表示各组的频率，那么样本的 k 阶原点矩 $\overline{x^k} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i$。

【例 2－4】 试根据表 2－1 所示的赔款额分组数据，求对数正态分布参数 μ 和 σ^2 的矩法估计。

表 2－1　　赔款额的频数和频率分布

赔款额（元）	频数	频率（%）	累积频率（%）
0～2 000	488	57.96	57.96
2 000～4 000	115	13.66	71.62
4 000～6 000	92	10.93	82.55
6 000～8 000	54	6.41	88.96
8 000～10 000	33	3.92	92.88
10 000～12 000	19	2.26	95.14
12 000～14 000	15	1.78	96.92
14 000～16 000	15	1.78	98.70
16 000～18 000	7	0.83	99.53
18 000～20 000	4	0.47	100.00
合计	842	100.00	—

解： 由于对数正态分布有两个待估参数，我们需要计算样本的一阶矩和二阶矩：

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i = 1\ 000 \times 0.5796 + 3\ 000 \times 0.1366 + \cdots + 19\ 000 \times 0.0047$$
$$= 3\ 314.8$$

$$\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 f_i = 1\ 000^2 \times 0.5796 + 3\ 000^2 \times 0.1366 + \cdots + 19\ 000^2 \times 0.0047 = 24\ 700\ 800$$

已知对数正态分布的 $E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$，$E(X^2) = e^{2(\mu+\sigma^2)}$，于是矩方程组为：

$$\begin{cases} e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} = 3\ 314.8 \\ e^{2(\mu+\sigma^2)} = 24\ 700\ 800 \end{cases}$$

从中不难解得 $\hat{\sigma}^2 = 0.81004$，$\hat{\mu} = 7.70113$。

【例 2－5】 如果用伽玛分布去拟合表 2－1 的分组数据，试求伽玛分布参数 α、β 的矩法估计。

解： 易知伽玛分布的数学期望和二阶原点矩分别为 $E(X) = \dfrac{\alpha}{\beta}$，$E(X^2) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$，可以建立矩方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} = 3\ 314.8 \\ \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} = 24\ 700\ 800 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \hat{\alpha} = 0.8009 \\ \hat{\beta} = 0.0002417 \end{cases}$

（2）极大似然估计。极大似然估计方法的基本思想和具体步骤是：

如果随机变量 X 的概率函数（密度函数或分布列）为 $f(x;\theta)$，式中的 θ 为待估的参数向量，那么 X 的 n 个观测值 X_1，X_2，…，X_n 的联合概率函数（称为似然函数）为：

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

在得到一组观测值后，L 是参数 θ 的函数。所谓极大似然估计方法就是求使得 L 达到最大的 θ 的值 θ_0。把 θ_0 作为参数 θ 的极大似然估计值，记作 $\hat{\theta}_{MLE} = \theta_0$。为了简化计算，在求 L 的极大值点时，常利用对数函数的单调性，将其等价地转化为求 $\ln L$ 的极大值点。

【例 2－6】 试根据表 2－2 所示的数据，求泊松分布参数 q 的极大似然估计。

表 2-2　某非寿险公司 100 000 份机动车辆险损失频率和累积频率

理赔次数	观测到的保单数	频率（%）	累积频率（%）
0	88 585	88.585	88.585
1	10 577	10.577	99.162
2	779	0.779	99.941
3	54	0.054	99.995
4	4	0.004	99.999
5	1	0.001	100.000
合计	100 000	100.000	—

解：泊松分布的概率函数为：$f(x;q)=e^{-q}\frac{q^x}{x!}$，$x=0,1,2,\cdots$

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;q)=\prod_{i=1}^{n}e^{-q}\frac{q^{x_i}}{x_i!}$$

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;q)=-nq+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln q-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i!$$

似然方程：$\frac{\partial\ln L}{\partial q}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{q}=0$

解得$\hat{q}_{MLE}=\bar{x}$，在这个例子中极大似然估计与矩法估计是一致的。由表2-2的数据，我们算得 $\bar{x}=0.12318$。这就是泊松分布参数 q 的极大似然估计值，在非寿险精算中常作为赔款频率的估计值。

（3）分位数估计法。有时为了避免少数极端数据对估计参数的影响，可采用分位数估计法。所谓分位数方法，就是用样本分位数去估计理论分布的分位数，建立方程组，解出理论分布分位数中含有的未知参数。下面用一个例子说明该方法。

【例 2-7】 观测到某险种的 25 笔赔款记录，赔款额（万元）从小到大排列为：

0.1　0.2　0.2　0.3　0.4　0.6　0.8　0.9　1.3　1.8　2.2　2.6　2.9
3.2　3.3　4.1　5.9　12.5　13.0　15.2　28.1　30.0　49.2　63.8　118.0

若用韦伯（Weibull）分布去拟合，试用分位数方法估计其参数。

解：已知韦伯分布的分布函数为 $F(x)=1-e^{-cx^{\gamma}}$，由于有两个未知参数需要估计，所以拟用样本的 25% 和 75% 分位数去估计相应的理论分布的分位数。分别令

$1-e^{-cx^\gamma}=0.25$ 和 $1-e^{-cx^\gamma}=0.75$

解得韦伯分布的25%分位数 $x_{0.25}=\left(\frac{-\ln 0.75}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ 和75%分位数 $x_{0.75}=\left(\frac{-\ln 0.25}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$。又根据观测记录，样本的25%分位数和75%分位数分别为0.65和12.875。令

$$\begin{cases}\left(\frac{-\ln 0.75}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=0.65\\\left(\frac{-\ln 0.25}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=12.875\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\hat{\gamma}=0.525\\\hat{c}=0.365\end{cases}$，这就是韦伯分布的两个参数的分位数估计值。

（4）最小二乘估计。设损失随机变量 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，根据观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 建立的经验分布函数为 $F_n(x)$，所谓未知参数 θ 的最小二乘估计，就是使得 $D(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i;\theta)-F_n(x_i)]^2$ 达到最小的 θ。

在实际应用时，为了提高最小二乘估计的效果，常对 $D(\theta)$ 做两点修正。第一是用 $\frac{n}{n+1}F_n(x)$ 代替 $F_n(x)$，这是因为经验分布函数 $F_n(x)$ 是个阶梯跳跃函数，在每个 x_i 处的跃度都是 $\frac{1}{n}$ 的倍数，而且 $F_n(x_n)=1$，作以上修正就是为了缓解这种阶梯跳跃的影响。第二是对和式的每一项加权。因为倘若不加权，由于观测值较多地集中在均值附近，容易使得 $D(\theta)$ 较多地受均值附近状况的影响，而尾部的差异对 $D(\theta)$ 的影响则不大，这显然不是我们所希望的。在非寿险精算研究损失分布时，分布函数的尾部状况尤为重要。通过加权，可以增强经验分布函数尾部信息对估计参数的影响。

于是，最小二乘估计的最小化目标函数 $D(\theta)$ 可以写为：

$$D(\theta)=\sum_{i=1}^{n}W(x_i)\left[F(x_i;\theta)-\frac{n}{n+1}F_n(x_i)\right]^2$$

其中权 $W(x_i)$ 可以有不同的取法，一般可取

$$W(x_i)=\frac{1}{F(x_i;\theta)[1-F(x_i;\theta)]}$$

对于分组数据，只要把各组上限作为 x_i，对 $D(\theta)$ 作相应变化即可。

由上述内容可见，利用同一组样本数据作参数点估计的方法并不是唯一的，而且，即使用同一种方法对同一个参数作点估计，其结果也未必是唯一的。一个典型的例子就是泊松分布的参数 q，既是数学期望，又是方差，所以 q 的矩法估计既可以是样本均值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，又可以是样本方差

$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$。

于是，如何评价点估计的好坏，即点估计的优良性问题摆在了精算师的面前。

2. 点估计的优良性。根据概率统计理论，有下列三种性质常被用来评价估计的好坏。

（1）无偏性。设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的估计量，若满足 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计。

显然，样本均值 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 是参数 $E(X)$ 的无偏估计；而经过修正的样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2$ 则是参数 $\mathrm{Var}(X)$ 的无偏估计。

（2）有效性。设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计，若 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$，则称估计量 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

（3）一致性。若对任意 $\varepsilon > 0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计。

这里的 n 是指样本容量。一致估计的直观意义是：当样本容量充分大时，估计量与被估计量的偏差较大的可能性趋于零。

由大数定律可知，矩法估计都是一致估计。

3. 区间估计。点估计是用一个统计量作为某个参数的估计。对一次观测来说，就是用一个数去估计某个参数。即使是性质很好的点估计，也无法告诉我们这个估计值的误差是多少，有多少可信度，而这些恰恰是精算师必须要知道的。于是，就要求我们在点估计的基础上确定一个范围，使得这个范围包含被估计参数的概率（置信度）相当大。这就是区间估计的问题，这样得到的区间就是置信区间。

【例 2-8】 设 X 是损失随机变量，分布未知，求未知参数 $E(X) = \mu$ 的区间估计。

解： 设 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是容量为 n 的样本平均数，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 为样本方差，根据中心极限定理和抽样分布理论，当 n 相当大（一般大于 30 即可）时，$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ 近似地服从标准正态分布。即

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

其中$z_{\frac{\alpha}{2}}$是标准正态分布$\Phi(z)$的分位数，满足$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}$，可以通过查标准正态分布表得到。

上式可以等价的写成：

$$P\left(\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha。$$

这里的$1-\alpha$就是置信度，区间$\left(\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$就是参数$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

这个置信区间长度的二分之一$z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}$，常被称为样本平均数的抽样允许误差，也叫抽样极限误差，记作$\Delta_{\bar{X}}$。抽样允许误差反映了区间估计的精度，它的大小受样本容量n、置信度$1-\alpha$以及总体方差的影响。显然，在其他条件不变的情况下，抽样允许误差与样本容量的算术根成反比。

【例2-9】 根据例2-4的赔款额分组数据，求赔款额随机变量X的数学期望$E(X)=\mu$的置信度为95%的置信区间。

解： 在例2-4中已经算得样本平均数$\bar{x}=3\ 314.8$及$\overline{x^2}=24\ 700\ 800$，样本标准差可以由下式计算得到：

$$S=\sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\overline{x^2}-\bar{x}^2\right)}=\sqrt{\frac{842}{842-1}\left(24\ 700\ 800-3\ 314.8^2\right)}=3\ 705.2944$$

查标准正态分布表得到$z_{0.025}=1.96$，于是抽样允许误差

$$\Delta_{\bar{X}}=1.96\times\frac{3\ 705.2944}{\sqrt{842}}=250.3353。$$

由此得到μ的置信度为95%的置信区间为（3 064.5220元，3 565.0780元）。

4. *参数假设检验*。对损失分布参数作统计推断的另一种方法是假设检验。

所谓参数假设检验方法是：先对随机变量的参数作出假设，然后选择检验统计量，确定检验规则和拒绝域，再根据观测到的数据计算检验统计量的值，从而作出拒绝还是接受原假设的判断。下面用一个例子说明这种方法在非寿险精算中的应用。

【例2-10】 某公司对某险种的费率是以赔款频率0.01，平均赔款额8 000元为基础计算的。2002年，该公司承保了1 000份这个险种的保单。在保险期限内，这些保单共发生了15次赔款，平均赔款额为8 025元。显然，平均赔款额与预定的相差无几，而赔款频率却比预定频率高出50%。据此，公司的决策者和精算师是否能认为实际赔款频率已显著高于预定频率而必须及时调整？

解：假设一份保单的赔款次数服从以 q 为参数的泊松分布。此时，问题归结为检验假设 $H_0: q=0.01$ 和其对立假设 $H_1: q>0.01$，选用检验统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-q}{\sqrt{q/n}}$，由于有 1 000 份保单，样本容量已足够大，所以在 H_0 成立的条件下，Z 近似服从标准正态分布。若显著性水平 $\alpha=0.05$，则拒绝域为 $Z \geqslant 1.645$，而根据观测值计算 $Z=\dfrac{0.015-0.01}{\sqrt{0.01/1\,000}}=1.581<1.645$，所以不能作出拒绝 H_0 的决断。也就是说，没有必要急于调整预定的赔款频率。

2.1.3 损失分布拟合

损失分布拟合的主要步骤是：首先根据观测得到的损失数据编制损失经验分布，并根据损失经验分布的形态特点选择与之最相似的理论分布族；然后利用 2.1.2 介绍的方法对选定的理论分布参数作统计推断，从而确定与损失经验分布拟合的理论分布。

1. *损失经验分布及其表示*。设 x_1，x_2，…，x_n 是损失随机变量 X 的 n 个观测值，将其按大小排列后得到：

$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$，我们称函数

$$F_n(x)=\begin{cases} 0 & x<x_{(1)} \\ \dfrac{1}{n} & x_{(1)} \leqslant x<x_{(2)} \\ \cdots & \\ \dfrac{k}{n} & x_{(k)} \leqslant x<x_{(k+1)} \\ \cdots & \\ 1 & x \geqslant x_{(n)} \end{cases}$$

为损失随机变量 X 的经验分布函数。

显然，损失随机变量 X 的经验分布函数是一个右连续的阶梯函数，它满足随机变量分布函数的所有性质。由于 $F_n(x)$ 实际上就是 n 个观测值落在区间$(-\infty, x]$的频率，因此用经验分布函数逼近损失随机变量的理论分布是合理的。这在理论上有格里汶科定理保证。

如果损失随机变量的观测值很多（即 n 很大），我们常采用将观测值分组的方法，用累积频率表示经验分布函数在各组上限的左极限。具体可用频率和累积频率分布表，如表 2-3 所示。

表 2－3　　频率和累积频率分布表

分组	频数（观测值个数）	频率	累积频率
$[t_0, t_1)$	n_1	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_1}{n} = F(t_1 - 0)$
$[t_1, t_2)$	n_2	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_1 + n_2}{n} = F(t_2 - 0)$
…			
$[t_{i-1}, t_i)$	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{\sum_{j=1}^{i} n_j}{n} = F(t_i - 0)$
…			
$[t_{k-1}, t_k]$	n_k	$\frac{n_k}{n}$	$1 = F(t_k)$
总计	n	1	—

为了消除组距不同对频率的影响，可以计算频率密度，频率密度＝频率/组距。即：

$$第\ i\ 组的频率密度 = \frac{\frac{n_i}{n}}{t_i - t_{i-1}}。$$

【例 2－11】　某非寿险公司企业财产保险的保险金额的经验分布可用频率和累积频率分布表表示，如表 2－4 所示。

表 2－4　　某非寿险公司企业财产保险金额的经验分布

按保额分组（万元）	户数	频率（%）	累积频率（%）
0～20	7	2.33	2.33
20～40	61	20.33	22.66
40～60	123	41.00	63.66
60～80	86	28.67	92.33
80～100	20	6.67	99.00
100～120	3	1.00	100.00
合计	300	100.00	—

根据表 2－4 中的最后一列，我们得到经验分布函数在各组上限的左极限：

$$F_n(20-0) = 0.0233$$

$$F_n(40-0) = 0.2266$$

$$F_n(60-0) = 0.6366$$

$$F_n(80-0) = 0.9233$$

$$F_n(100-0) = 0.9900$$

$$F_n(120-0) = 1.0000$$

如果各组数据分布均匀，我们可以据此用线性插值的方法估算某些事件的概率。例如，我们在安排再保险时需要知道一个企业财产保险的保险金额不低于50万元的概率，就可以按如下方法估计：

$$
\begin{aligned}
P(X \geqslant 50) &= 1 - P(X \leqslant 50) \\
&\approx 1 - F_n(50-0) \\
&= 1 - \left[F_n(40-0) + \frac{F_n(60-0) - F_n(40-0)}{60-40}(50-40) \right] \\
&= 1 - 0.4316 \\
&= 0.5684
\end{aligned}
$$

为了直观地显示经验分布大致状况和主要特征，并能与理论分布的分布律或密度函数作对照或拟合，我们可以绘制频率密度直方图、折线图和曲线图。

频率密度直方图以损失随机变量的观测值分组为横坐标，以各组的频率密度为纵坐标，以矩形面积为随机变量观测值落在各组的频率。

在等距式分组的情况下，频率直方图的形态与频率密度直方图是一样的。

将频率密度直方图的各个矩形上底中点用线段连接起来，就是频率密度折线图。把折线图修匀（光滑化），就成为频率密度曲线图。频率密度曲线图是连续型随机变量概率密度函数曲线的近似形态。

图2－1就是根据例2－11的数据绘制的频率密度直方图、折线图和曲线图。

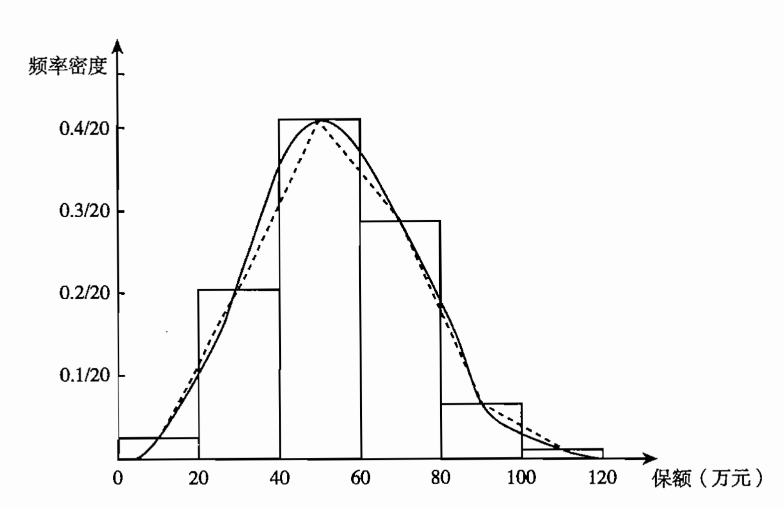


图2－1　某非寿险公司企业财产保险金额的频率密度图

损失次数的经验分布可以下例的形式表示。

【例2－12】 根据例2－6的观测数据（表2－2）编制的损失频率和累积频率，可以建立损失次数的经验分布函数：

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.88585 & 0\leqslant x<1\\ 0.99162 & 1\leqslant x<2\\ 0.99941 & 2\leqslant x<3\\ 0.99995 & 3\leqslant x<4\\ 0.99999 & 4\leqslant x<5\\ 1.00000 & x\geqslant 5\end{cases}$$

编制损失额的经验分布，在观测数据很多的情况下，我们可以对观测值按组距式分组的方法编制频率分布表，从而得到损失额的经验分布。

比如，根据例 2－4 编制的赔款额频数分布表（表 2－1）可以得到损失额的经验分布，也可以绘制频率密度直方图。

在频率分布很不均匀的情况下，可以用不等距分组的方法编制经验分布函数。

【例 2－13】 某保险公司观测了 86 次赔款，赔款额分布情况如表 2－5 所示。

表 2－5　　**赔款额的频数和频率分布**

赔款额（元）	观测到的赔款次数	频率（%）	累积频率（%）
0～1 000	15	17.44	17.44
1 000～2 000	40	46.51	63.95
2 000～5 000	23	26.75	90.70
5 000～10 000	8	9.30	100.00
合计	86	100.00	—

由此编制的经验分布函数在各组上限的左极限为：

$$F_n(x-0)=\begin{cases}0 & x=0\\ 0.1744 & x=1\ 000\\ 0.6395 & x=2\ 000\\ 0.9070 & x=5\ 000\\ 1.0000 & x=10\ 000\end{cases}$$

由于我们把赔款额看作是一个连续型随机变量，因此可以将 $F_n(x-0)$ 当作 $F_n(x)$，并用数对 $(x,\ F_n(x-0))$ 在平面直角坐标系中对应的点用光滑曲线连接起来，就得到修匀的经验分布函数曲线；如图 2－2 所示，并可以其作为赔款额理论分布的近似。

利用修匀的经验分布函数曲线可以估计各组上限之间的经验分布函数

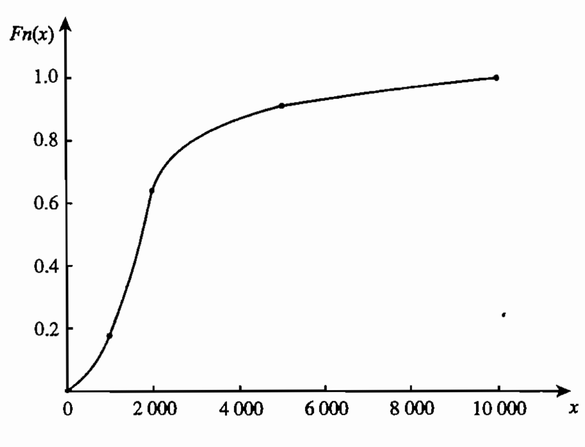


图 2－2 修匀的经验分布函数曲线

值，并进一步计算赔款额落在某个区间的概率。但是，从图 2－2 可以看到，曲线在赔款额 1 000－2 000 之间爬升过快，容易使计算出来的概率有较大的误差。在这种情况下，可以对赔款额 X 作对数变换 $Y=\ln X$，从而建立 y 与 $F_n(y)$ 的对应，并修匀 $F_n(y)$ 的曲线如表 2－6、图 2－3 所示。

表 2－6　　$Y=\ln X$ 的经验分布函数值

$y=\ln x$	$F_n(y)$
6.91 = ln1 000	0.1744
7.60 = ln2 000	0.6395
8.52 = ln5 000	0.9070
9.21 = ln10 000	1.0000

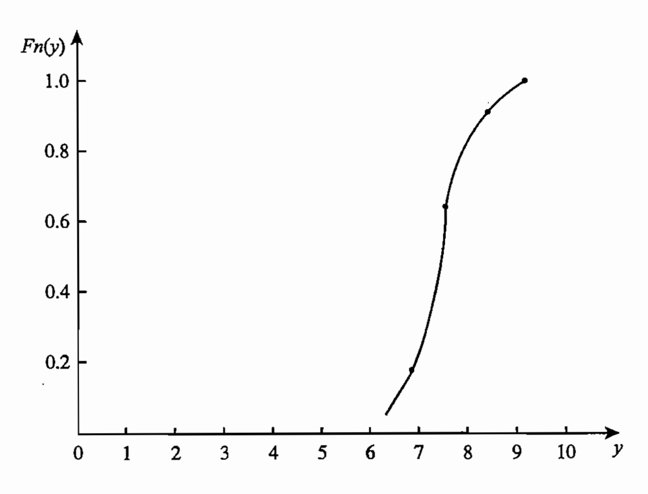


图 2－3 以 $y=\ln x$ 为自变量的经验分布函数曲线图

这样，我们就可以用曲线图或线性插值的方法去估计概率了。例如，估计得到赔款额介于 1 500 元和 2 500 元之间的概率：

$$\begin{aligned} P(1\,500 < X \leqslant 2\,500) &= P(\ln 1\,500 < Y \leqslant \ln 2\,500) \\ &\approx F_n(7.82) - F_n(7.31) \\ &\approx 0.70 - 0.45 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

根据损失经验分布的一些特征，选择已知的理论分布与之拟合，这是精算师的一项重要任务。一般可以先根据损失观测数据的频率密度的直方图或曲线图形态（如连续还是离散，单峰还是多峰，正态还是偏态，左偏还是右偏等），从与其形似的理论分布族中，选择适当的分布列或概率密度函数曲线，然后利用观测数据对理论分布的参数作统计推断（估计或假设检验）；最后再对理论分布作拟合优度检验。

2. 损失次数分布的拟合。

【例 2 –14】 对于例 2 –6 所编制的赔款次数的经验分布，我们分别用泊松分布和负二项分布去拟合后，得到的理论频数如表 2 –7 所示。

表 2 –7　　　　损失次数经验分布的拟合

赔款次数	观测到的保单数	用泊松分布拟合的理论频数	用负二项分布拟合的理论频数
0	88 585	88 411	88 597
1	10 577	10 890	10 544
2	779	671	806
3	54	27	50
4	4	1	3
5	1	0	0
合计	100 000	100 000	100 000

需要说明的是：这里的参数 q，k，p 用矩法估计而得。读者也可以用极大似然估计和最小二乘估计方法计算并作比较。

根据对例 2 –6 数据的计算，赔款次数的样本矩 $\bar{x}=0.12318$，$\overline{x^2}=0.14248$。泊松分布参数 q 的拟合值为 $q=0.12318$；负二项分布参数 k、p 的拟合值分别为 $k=3.507$，$p=0.966065$。上表中这两种分布的理论频数都是根据参数的拟合值计算出来的。表中结果显示负二项分布的拟合要更好一些。

3. 损失额分布的拟合。

【例 2 –15】 对于例 2 –4 的编制的经验分布，我们如果选择对数正态分布与其拟合，那么由例 2 –4 的计算可知，该对数正态分布的参数的矩法

估计 $\mu = 7.70113$，$\sigma^2 = 0.81004$，也就是说，我们可以用对数正态分布 $LN(7.70113, 0.81004)$ 去拟合例 2－14 的经验分布。如果想由此计算一笔赔款额超过 5 000 元的概率，那么：

$$
\begin{aligned}
P(X > 5\,000) &= 1 - P(X \leqslant 5\,000) \\
&= 1 - P\left(\frac{\ln X - 7.70113}{\sqrt{0.81004}} \leqslant \frac{\ln 5\,000 - 7.70113}{\sqrt{0.81004}}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.9065) \\
&= 0.1814
\end{aligned}
$$

2.1.4 损失分布拟合优度检验

在很多场合下，对于用一组损失观测值用究竟哪一种理论分布去拟合更好一些，并不能像例 2－14 那样明显地看出来。这时有多种方法可用来判断，其中拟合优度检验是最常见的一种非参数假设检验。我们一般选用 χ^2 检验。

1. χ^2 拟合优度检验。χ^2 拟合优度检验的原假设是 H_0：损失数据服从某个理论分布。为了检验 H_0，先把观测到的数据分成 n 组。选用检验统计量 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Q_i - E_i)^2}{E_i}$，式中的 Q_i 是第 i 组中观测到的实际频数，E_i 是根据假设的理论分布计算出来的理论频数。在假设 H_0 成立的前提下，统计量 χ^2 服从自由度为 $n-k-1$ 的 χ^2 分布，其中 k 为理论分布中用参数估计方法得到的参数的个数。

【例 2－16】 某非寿险公司经营车辆险，观测得到的 1 000 次赔款的赔款额分布如表 2－8 所示，业务人员想用指数分布拟合赔款额分布，精算师应如何回应？

表 2－8　　1 000 次赔款的赔款额频数分布

赔款额（元）	观测到的实际赔款次数 Q_i	用指数分布计算的理论频数 E_i
0～1 000	200	371.9
1 000～2 000	300	233.6
2 000～3 000	250	146.7
3 000～4 000	150	91.1
4 000～5 000	100	57.9
5 000～6 000	0	98.8
合计	1 000	1 000.0

解： 首先，计算得到赔款额的样本平均数 $\bar{x} = 2\,150$。用极大似然法估计指

数分布参数 λ，可得 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{1}{2\ 150}$。然后根据估计的 λ 确定指数分布的密度函数，从而计算出赔款额落在各个组的理论概率，例如：

$$P(2\ 000 \leqslant X \leqslant 3\ 000) = \int_{2\ 000}^{3\ 000} \frac{1}{2\ 150} e^{-\frac{x}{2\ 150}} dx = 0.1467$$

因此，$E_3=0.1467\times 1\ 000=146.7$。用同样的方法可以计算出其他的 E_i，结果列于表 2－8 的右列。

问题归结为检验假设 H_0：该车辆险的赔款额服从以 $\lambda=\frac{1}{2\ 150}$为参数的指数分布。可以选择χ^2 检验统计量。如果显著性水平 $\alpha=0.05$，查自由度为 $6-1-1=4$ 的χ^2 分布表，得到分位数 9.488，拒绝域为$\chi^2\geqslant 9.488$。而根据表中数据计算 $\chi^2=338.56>9.488$，所以拒绝假设 H_0，精算师应该对业务人员说：用指数分布去拟合该赔款额的分布是不适宜的。

2. 部分保险数据损失分布的拟合。所谓部分保险指的是，对保险标的因保险事故造成的实际损失，依据损失补偿原则和保险合同，只能作部分赔偿的保险。保险合同中规定有免赔额、最高赔偿限额，或比例赔偿的保险，都属于部分保险。

在把损失分布理解为事故实际损失的分布函数时，部分保险的赔款额和赔款次数的分布实际上是损失分布的一种截尾（也称截断）。

例如，已知事故实际损失额随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，在保险合同只约定有绝对免赔额 $d>0$ 的情况下，赔款额

$$Y=\begin{cases} X-d & X>d \\ 0 & X\leqslant d \end{cases},$$

由全概率公式，Y 的分布函数

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y\leqslant y) \\ &= P(X-d\leqslant y \mid X>d)P(X>d)+P(0\leqslant y \mid X\leqslant d)P(X\leqslant d) \\ &= P((X-d\leqslant y)\cap(X>d))+P(X\leqslant d) \\ &= P(d<X\leqslant d+y)+P(X\leqslant d) \\ &= F_X(d+y)-F_X(d)+F_X(d) \\ &= F_X(d+y) \end{aligned}$$

上式对变量 y 求导，得到 Y 的密度函数：

$$f_Y(y)=f_X(d+y)$$

由于，

$$Y=\begin{cases} X-d & X>d \\ 0 & X\leqslant d \end{cases}$$

所以，

$y\leqslant 0$ 时，显然 $F_Y(y)=0$，

$$
\begin{aligned}
y>0\text{ 时，即 } X>d,\ F_Y(y) &= P(Y\leqslant y \mid X>d) \\
&= P(X-d\leqslant y \mid X>d) \\
&= P(d<X\leqslant y+d \mid X>d) \\
&= \frac{F_X(y+d)-F_X(d)}{1-F_X(d)}
\end{aligned}
$$

赔款额 Y 的分布函数

$$
F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ P(Y\leqslant y \mid X>d)=\dfrac{F(y+d)-F(d)}{1-F(d)} & y\geqslant 0 \end{cases}
$$

就是分布函数 $F(x)$ 的一个下（左）截尾。

在精算实务中，精算师容易取得的是 Y 的观测值，希望得到的是 X 的分布。那么，如何从 Y 的观测值 y_1，y_2，…，y_n 当中去捕捉 X 的分布的信息呢？这就是部分保险损失分布的拟合问题。

假设事故损失额随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 形式已知，需要估计其中含有的未知参数 θ。如果保险合同约定绝对免赔额为 d，那么由上式可知未知参数 θ 一定包含在 Y 的分布函数之中，而且 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 的形式也已知了。在这种情况下，只要利用 Y 的观测值 y_1，y_2，…，y_n 去推断 $F_Y(y)$ 中的未知参数 θ 就行了。

§2.2 损失后验分布的推断方法

损失分布的拟合需要足够多的样本信息，而在非寿险实务中常常做不到这一点。特别是对于那些新建的保险公司或者新开设的险种来说，要掌握足够数量的符合理论要求的观测数据是不现实的。在这种情况下，就需要加入精算师和决策者的主观判断（包括选择和借用其他公司的信息或自己公司其他险种的信息），同时还要利用本公司本险种新获得的数据来修正原来的推断。这种对损失后验分布的推断方法就是贝叶斯统计方法。

2.2.1 贝叶斯方法与公式

统计推断通常可以利用三种信息：总体信息（也就是关于理论分布的信息）、样本信息（从观测值中得到的信息）和先验信息。只采用前两种信息的统计方法称为经典统计，三种信息都采用的统计方法称为贝叶斯统计。

贝叶斯统计方法起源于英国学者贝叶斯（Bayes，T. S. 1702 – 1761 年）的一篇论文《论有关机遇问题的求解》在这篇文章中贝叶斯提出了著名的贝叶斯公式和一种归纳推理的方法。此后，数学家拉普拉斯用贝叶斯的方

法导出一些重要的结果，贝叶斯方法逐渐为人们所重视。伴随着近代概率论的发展，贝叶斯方法从20世纪30年代开始逐渐发展成为一个有影响的统计学派——贝叶斯学派，在工业、经济、管理等领域中得到了广泛的应用。在非寿险精算中主要用于估计损失分布、调整费率、校正保费等问题。

假设损失随机变量 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，在连续的情形下相应的密度函数为 $f(x;\theta)$，估计未知参数 θ 的贝叶斯方法与经典数理统计方法的一个基本区别在于：贝叶斯方法将参数 θ 看作是一个随机变量的取值。因此，θ 本身也应该有个概率分布。在这种假定下，参数估计的贝叶斯方法可采取如下步骤：

（1）选择先验分布。设参数 θ 的分布函数和密度函数分别为 $\prod(\theta)$ 和 $\pi(\theta)$，称为先验分布和先验密度，它反映了精算师和决策人对参数 θ 的初步看法，这些看法可以是基于过去的知识和经验的主观判断。

（2）确定条件联合密度函数。精算师和决策人对损失随机变量做试验并观测其结果，假设得到的观测值为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 则在已知 θ 的条件下，观测值的联合密度函数为：

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\text{，或简记为 } f(x \mid \theta)\text{。}$$

（3）求出 θ 的后验分布。按照关于条件概率的贝叶斯公式，可以求出 θ 的后验分布。对于连续型随机变量，后验密度为：

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{f(x \mid \theta)\pi(\theta)}{\int f(x \mid \theta)\pi(\theta)\,d\theta} \tag{2.2.1}$$

（4）选取损失函数。这里的损失函数并非指事故损失或赔款损失，而是指用估计值取代真实值时可能造成的损失。不同的损失函数取决于不同的评价标准，在不同的损失函数下的贝叶斯估计一般是不同的。常用的损失函数有平方损失函数、绝对误差损失函数等。

（5）估计参数。根据参数的后验分布和所选取的损失函数通过求损失函数数学期望的最小值点，得到参数 θ 的贝叶斯估计值。

与经典的数理统计方法不同，贝叶斯方法认可精算师和决策人的主观判断。这种判断的主观性体现在贝叶斯参数估计方法的两个阶段上：第一个阶段是根据主观判断选择先验概率或先验分布，然后利用观测数据求后验概率或后验分布；第二个阶段是根据主观判断选择损失函数，然后，利用求最小平均损失的方法求出未知参数的贝叶斯估计。

贝叶斯估计方法在第一个阶段可求出未知参数 θ 的后验概率或后验分布，其理论依据就是贝叶斯公式。贝叶斯公式的事件形式是：若用 Ω 表示样本空间，随机事件 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$，$B_1$，$B_2$，…互不相容，则：

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A | B_i)P(B_i)}, i = 1, 2, \cdots$$

其中 $P(B_i)$ 称为先验概率，它是由决策人根据主观判断决定的；$P(B_i|A)$ 称为后验概率，它是在事件 A 已经发生的情况下根据贝叶斯公式计算出来的。

【例 2-17】 某公司机动车辆的保单持有人有 80% 居住在市区，有 20% 居住在郊区，而居住在市区的保单持有人的索赔案中有 90% 的事故发生在市区内，有 10% 的事故发生在市外；非市区的保单持有人的索赔案中有 15% 的事故发生在市区内，有 85% 的事故发生在市外。现在接到一个发生在市外的事故报告，试问该保单持有人是市区居住者的概率为多大？

解： 用 D 表示保单持有人的居住地，用 L 表示事故发生地，用 u 表示市区，用 r 表示市区外，根据已知：

$P(D=u)=0.80$，$P(D=r)=0.20$，

$P(L=u|D=u)=0.90$，$P(L=r|D=u)=0.10$，

$P(L=u|D=r)=0.15$，$P(L=r|D=r)=0.85.$

由贝叶斯公式，

$$P(D=u|L=r) = \frac{P(L=r|D=u)P(D=u)}{P(L=r|D=u)P(D=u)+P(L=r|D=r)P(D=r)}$$

$$= \frac{0.10 \times 0.80}{0.10 \times 0.80 + 0.85 \times 0.20} = 0.32$$

2.2.2 先验分布和后验分布

公式（2.2.1）表示的是贝叶斯公式的密度函数形式。式中的 $f(x|\theta)$ 是在已知 θ 的条件下，损失随机变量 X 的观测值的联合密度函数，$\pi(\theta)$ 和 $\pi(\theta|x)$ 分别是参数 θ 的先验分布和后验分布的密度函数。在损失随机变量分布类型确定的情况下，选择不同的先验分布，就可以根据式（2.2.1）得到参数 θ 的不同的后验分布。

【例 2-18】 已知某险种的一份保单在保险期限内的赔款次数 X 服从以 θ 为参数的泊松分布，即

$$f(x) = P(X=x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}, x=0, 1, 2, \cdots$$

由于风险的异质性，参数 θ 可以看做一个随机变量。根据先验信息，θ 服从以 α、β 为参数的 Gamma 分布，即

$$\pi(\theta) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta\theta}(\beta\theta)^{\alpha-1}, \theta>0。$$

现在观测了 n 份保单，赔款次数依次为 x_1，x_2，…，x_n，要求 θ 的后验分布。

解： 给定参数 θ 后，观测值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的条件联合密度函数为：

$$f(x \mid \theta) = e^{-n\theta}\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i !}$$

经过简单的计算可得 θ 的后验分布密度函数

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{\beta + n}{\Gamma(\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i)} e^{-(\beta+n)\theta}[(\beta + n)\theta]^{\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}$$

显然，这是以 $\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i$，$\beta + n$ 为参数的 Gamma 分布。

这种先验分布与后验分布属于同一种类型分布的场合，我们称之为互为共轭分布。

表 2－9 给出了几个常用的损失随机变量分布参数的先验分布和相应的后验分布，供计算时参考。

表 2－9　　常见的先验分布和后验分布

损失随机变量的分布（观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$）	未知参数	参数的先验分布	参数的后验分布
泊松分布 $P(\lambda)$ 伽玛分布 $\mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$\lambda > 0$	$\mathrm{Gamma}(\beta, \gamma)$	$\mathrm{Gamma}(\sum x_i + \beta, n + \gamma)$ $\mathrm{Gamma}(n\alpha + \beta, \sum x_i + \gamma)$
泊松分布 $P(\lambda)$ 伽玛分布 $\mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$\lambda > 0$	$U(0, +\infty)$	$\mathrm{Gamma}(\sum x_i + 1, n)$ $\mathrm{Gamma}(n + \alpha, \sum x_i)$
二项分布 $B(m, p)$ 负二项分布 $NB(k, p)$	$0 < p < 1$	$\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$	$\mathrm{Beta}(\sum x_i + \alpha, nm - \sum x_i + \beta)$ $\mathrm{Beta}(nk + \alpha, \sum x_i + \beta)$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$-\infty < \mu < +\infty$	$N(\theta, \tau^2)$	$N\left(\frac{\sum x_i/\sigma^2 + \theta/\tau^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2}, \frac{1}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2}\right)$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$-\infty < \mu < +\infty$	$U(-\infty, +\infty)$	$N\left(\frac{\sum x_i}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

2.2.3　参数估计的损失函数

贝叶斯估计方法的第二个阶段是选择损失函数并寻求使平均损失最小的估计值。

所谓损失函数，实际上是对参数估计值和真值之间的误差可能带来的损失的一种判断，它带有主观性，所以这也是贝叶斯方法所需先验信息的

一部分。损失函数一般用 $\mathrm{Loss}(\hat{\theta},\theta)$ 表示，这里未知参数 θ 是随机变量，$\mathrm{Loss}(\hat{\theta},\theta)$ 是 θ 的函数。贝叶斯估计就是使平均损失，亦即 $\mathrm{Loss}(\hat{\theta},\theta)$ 的数学期望达到最小的估计值 $\hat{\theta}$。也就是说，$\hat{\theta}$ 是函数的极小值点。

$$E(\mathrm{Loss}(\hat{\theta},\theta)) = \int \mathrm{Loss}(\hat{\theta},\theta)\pi(\theta \mid x)d\theta$$

常用的损失函数有平方损失函数、绝对值损失函数和 0－1 损失函数等。这些损失函数及其对应的贝叶斯估计如表 2－10 所示。

表 2－10　　三种常用的损失函数及其对应的贝叶斯估计

损失函数 $\mathrm{Loss}(\hat{\theta},\theta)$	参数 θ 的贝叶斯估计
平方损失函数 $(\hat{\theta}-\theta)^2$	后验分布的数学期望 $\hat{\theta}=E(\theta \mid x)$
绝对值损失函数 $\lvert\hat{\theta}-\theta\rvert$	后验分布的中位数
0－1 损失函数 $L=\begin{cases}1 & \lvert\hat{\theta}-\theta\rvert>\varepsilon \\ 0 & \lvert\hat{\theta}-\theta\rvert\leqslant\varepsilon\end{cases}$ 式中 $\varepsilon>0$，ε 较小	后验分布的众数

2.2.4　平方损失函数下的贝叶斯估计

下面以两个例子说明平方损失函数下的贝叶斯估计方法。

【例 2－19】　假设某险种的 n 份保单在一年中的赔款次数 X 服从以 n 和 p 为参数的二项分布，而参数 p 的先验分布为 $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$。经过一年的观测，得到了 X 的一个观测值 x_1。现在要求 p 的后验分布以及 p 在平方损失函数下的贝叶斯估计，并将它与 p 的极大似然估计作比较。

解： 由式（2.2.1）算得：

$$\pi(p \mid x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+x_1)\Gamma(\beta+n-x_1)}p^{\alpha+x_1-1}(1-p)^{\beta+n-x_1-1}$$

可以看出 p 的后验分布是 $\mathrm{Beta}(\alpha+x_1,\beta+n-x_1)$，在平方损失函数下，$p$ 的贝叶斯估计是后验分布的数学期望，即

$$\hat{p}_B=E(p \mid x_1)=\frac{\alpha+x_1}{\alpha+\beta+n}$$

假如我们没有可利用的先验信息，可以通过求对数似然函数

$$\ln L(p;x_1)=\ln C_n^{x_1}p^{x_1}(1-p)^{n-x_1}$$

的极小值点的方法得到 p 的极大似然估计

$$\hat{p}_L=\frac{x_1}{n}$$

显然，两者的区别在于有没有利用先验信息 α、β。这里 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 是参数 p

的先验分布的数学期望，$\frac{\alpha+x_1}{\alpha+\beta+n}$则是 p 的后验分布的数学期望。

【例 2-20】 如果把例 2-19 中 p 的先验分布改为（0，1）区间上的均匀分布，即 Beta(1，1)分布，那么在其他条件不改变的情况下，容易算得：在平方损失函数下，p 的贝叶斯估计为

$$\hat{p}_B=\frac{x_1+1}{n+2}$$

§2.3 损失分布的随机模拟方法

2.3.1 随机模拟方法概述

非寿险精算实务中建立损失经验分布所需要的损失数据必须经过较长时间的积累才能满足要求。而对于一个建立不久的新公司或者一个新开设的险种来说，要做到这一点是困难的。同时，对于有些损失随机变量，虽然可以知道它的理论分布，但由于理论分布的复杂性，使得有些精算问题难以用传统的解析方法处理或计算起来过于繁琐。在这些场合，随机模拟方法将显示出其极大的优越性。在非寿险精算中，特别是在非寿险公司偿付能力的估计、投资风险的分析和汽车险的无赔款优待折扣系统的选择等问题的计算时，随机模拟方法显得格外方便。

所谓模拟，就是把某一现实的或抽象的系统的某种特征或部分状态，用另一系统（称为模拟系统）来代替或模仿。因为模拟方法是利用随机数进行模拟计算的，所以这种方法也称为随机模拟的方法。又因为这种方法是利用计算机进行数值计算的一种具有特殊风格的方法，所以又称为计算机模拟方法。由于该方法也是对构造的模拟模型作统计试验，进而研究、分析原有的系统或设计新的系统，故此方法也称为统计试验法或统计模拟法。这个方法还有一个更有意思的名字——“蒙特卡罗（Monte Carlo）方法”。蒙特卡罗是摩纳哥国的著名赌城。1946 年，物理学家冯·诺依曼（Von Neumann）等人在这里利用电子计算机通过随机抽样的方法模拟了裂变物质的中子连锁反应。因为这项工作是与研制原子弹有关的秘密工作，所以他们就把这种方法叫做蒙特卡罗方法。以赌城的名字作为随机模拟方法的代号，既风趣又贴切，此名字很快为人们所普遍接受。有不少介绍随机模拟方法的著作就是以“蒙特卡罗方法”命名的。

虽然随机模拟方法起始于 20 世纪 40 年代，但是从方法特征的角度来说，可以一直追溯到 18 世纪后半叶的蒲丰（Buffon）投针试验，即著名的“蒲丰问题”。蒲丰投针试验可以视为随机模拟方法的雏形。

在非寿险精算中运用随机模拟方法的基本思想和步骤是：为求解某个

精算问题，首先构造一个合适的概率模型（随机事件、随机变量或其理论分布、随机系统等），使所求问题的解正好是该模型的参数或有关量。然后，进行模拟，也就是作统计试验，获取模拟值。最后对模拟结果进行统计处理（如计算频率、平均值等），给出所求问题的解和解的精度。

随机模拟方法是一种独特的广义的数值计算方法，也是求解实际问题数值解的一种方法。对一个非寿险精算的实际问题，是否适宜应用随机模拟方法求解，是由问题的实际背景和随机模拟方法的基本特点所决定的。随机模拟方法的基本特点是：方法新颖，应用面广，适用性强，算法简单；但计算量大，模拟结果具有随机性，且精度不高，使用有局限性。我们只有了解了随机模拟方法的基本特点，才能取得合理使用这个方法的效果。

随机模拟方法在非寿险精算实务中主要用于对损失随机变量的模拟。

我们称服从某个分布的随机变量的模拟值为该分布的随机数。均匀分布随机数，在随机变量模拟中起着举足轻重的作用。这是因为：其他分布的随机数都可由均匀分布随机数产生。可以通过简单的证明得出结论：如果随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 连续且严格单调，则 X 的函数 $Y=F(X)$ 服从[0，1]上的均匀分布。

这个结论告诉我们，如果随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 连续且严格单调，$F^{-1}(x)$ 是 $F(x)$ 的反函数，而 U 是服从[0，1]上的均匀分布的随机变量，那么，U 的函数 $F^{-1}(U)$ 的分布函数也是 $F(x)$。事实上，若令 $F^{-1}(U)=\inf\{x: F(x)\geqslant U\}$，$0\leqslant U\leqslant 1$，则对任意的分布函数 $F(x)$，$X=F^{-1}(U)$ 的分布函数都为 $F(x)$，其中 U 服从[0，1]上的均匀分布。

于是，要想获得分布函数为 $F(x)$ 的一列随机数，只要先产生一列[0，1]上均匀分布的随机数 u_1，u_2，…，再令 $x_i=F^{-1}(u_i)$，$i=1,2,\cdots$，则 x_1，x_2，…就是分布函数为 $F(x)$ 的一列随机数。而且，如果 u_1，u_2，…相互独立，那么 x_1，x_2，…也相互独立。这种方法称为反函数法（The Inverse Transformation Method）。

由于均匀分布是最简单的连续型分布，所以我们经常从均匀分布随机数出发，产生其他分布的随机数。

产生均匀分布随机数的方法，除了查已经编制好的随机数字表以外，主要依靠计算机生成。

由于计算机都是按照一定的递推公式来确定均匀分布随机数序列，所以必须对其均匀性和独立性做统计检验。一般可用 χ^2 拟合优度检验方法检验其均匀性，用相关系数法检验其独立性。

2.3.2　损失额分布的随机模拟

利用均匀分布随机数，我们可以模拟各种其他分布的随机数。

对于连续型随机变量 X，如果其分布函数 $F(x)$ 的反函数 $F^{-1}(x)$ 存在，那么可以利用反函数法，得到 X 的随机数（也叫随机变量 X 的观测值）。

按照这种方法，如果 u_k，$k=1, 2, \cdots$ 是一列均匀分布随机数，那么，$x_k=F^{-1}(u_k)$ 就是一列 X 的随机数。

【例 2-21】 试模拟指数分布随机数。

解： 设随机变量 X 服从以 λ 为参数的指数分布，其分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

则根据 2.3.1 中的结论，$U=F(X)=1-e^{-\lambda X}$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，于是有

$$X=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$$

由于 $1-U$ 也服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，为简单起见，上式可写为：

$$X=-\frac{1}{\lambda}\ln U$$

这就是说，只要有一列均匀分布的随机数 u_1，u_2，$\cdots$，那么，$x_k=-\frac{1}{\lambda}\ln u_k$，$k=1, 2, \cdots$ 就是一列参数为 λ 的指数分布随机数。

由于伽玛分布可以看作独立的指数分布之和，所以我们也就有了生成伽玛分布随机数的方法。

【例 2-22】 试生成 α 为正整数时伽玛分布随机数。

解： 设 $X\sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$，其中 α 为正整数，$\beta>0$，根据指数分布的可加性 $X=\sum_{i=1}^{\alpha}Y_i$，其中 Y_i 都服从参数为 β 的指数分布，且相互独立。于是，我们只要按照例 2-21 的方法获得 α 个指数分布的随机数 y_1，y_2，$\cdots$，y_α，将它们相加，则 $x=\sum_{i=1}^{\alpha}y_i$ 就是我们想要得到的 $\mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$ 分布的随机数。

正态分布是最常见的连续型分布，而且根据中心极限定理，独立同分布随机变量之和在一定条件下可以用正态分布近似，所以正态分布随机变量的模拟也显得非常重要。正态分布随机变量模拟的方法常有：

（1）变换方法。变换方法是 Box 和 Muller 在 1958 年提出来的，所以该法也叫 Box—Muller 方法。这种方法的理论依据是：如果 U_1、U_2 是两个服从 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机变量，而且相互独立，那么，

$$Z_1=\sqrt{-2\ln U_1}\cos 2\pi U_2 \tag{2.3.1}$$

$$Z_2=\sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2 \tag{2.3.2}$$

都服从标准正态分布，且相互独立。

事实上，由式（2.3.1）和式（2.3.2）得：

$$\begin{cases} U_1 = e^{-\frac{1}{2}(Z_1^2+Z_2^2)} \\ U_2 = \dfrac{1}{2\pi}\arctan\dfrac{Z_2}{Z_1} \end{cases}$$

其 Jacobi 行列式为：

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_1} & \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_2} \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial Z_1} & \dfrac{\partial U_2}{\partial Z_2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(Z_1^2+Z_2^2)}$$

于是，Z_1、Z_2 的联合密度函数为：

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_1^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_2^2}{2}}$$

所以，Z_1、Z_2 都服从标准正态分布，且相互独立。

这种方法的特点是：由一对相互独立的[0，1]上均匀分布的随机数，产生一对相互独立的标准正态分布随机数；计算量较大，计算速度较慢。

（2） 近似方法。近似方法的理论依据是中心极限定理。

设 U_1、U_2、$\cdots U_n$ 是一列[0，1]上均匀分布的随机数，且相互独立，则 $E(U)_i = \frac{1}{2}$，$\mathrm{Var}(U)_i = \frac{1}{12}$，由中心极限定理，

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

近似地服从标准正态分布。一般令 $n = 12$ 就有较好的近似程度，这时，Z 简化为：

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^{12} U_i - 6 \\ &= \sum_{i=1}^{6} U_i - \sum_{i=7}^{12}(1 - U_i) \end{aligned}$$

由于 $1 - U_i$ 也服从 [0，1] 上的均匀分布，为提高计算速度，上式可写为 $Z = \sum_{i=1}^{6} U_i - \sum_{i=7}^{12} U_i$，显然，这样得到的标准正态分布随机数 $|Z| \leqslant 6$，而且是 12 个均匀分布随机数产生一个标准正态分布随机数。这种方法的特点是计算速度较快。

（3） 查表方法。查表方法也就是反函数法。

设 Z 服从标准正态分布，$\Phi(z)$是它的分布函数，那么，$U = \Phi(Z)$服从[0，1]上的均匀分布，于是，$Z = \Phi^{-1}(U)$。这就是说，只要有均匀分布随机数 u_k，$k = 1, 2, \cdots$，通过查正态分布表，使 $\Phi(z_k) = u_k$，z_k，$k = 1, 2, \cdots$，就是一列标准正态分布随机数。

用上述各法得到标准正态分布随机数以后，我们就可以通过以下方法得到任何正态分布的随机数。

如果要得到以 μ 为数学期望，以 σ^2 为方差的正态分布随机变量 X 的模拟值，由于 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 服从标准正态分布，所以只要有标准正态分布随机数 Z，就可由 $X=\sigma Z+\mu$ 得到 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机数。

【例 2－23】 模拟 $N(3, 4)$ 分布的随机数。

解：先生成[0，1]上均匀分布随机数 $u_1=0.90988$，查正态分布表得 $\Phi(1.34)=0.90988$，则 $z_1=1.34$，于是 $x_1=2\times1.34+3=5.68$ 就是所求之正态分布随机数。

在非寿险精算中，对数正态分布等连续型随机变量常用来作为损失额的数学模型。这里介绍利用正态分布随机数模拟对数正态分布及其他一些连续型随机变量的方法。

【例 2－24】 试模拟以 μ，σ^2 为参数的对数正态分布随机数。

解：设 $X\sim LN(\mu, \sigma^2)$，则 $\ln X\sim N(\mu, \sigma^2)$，$Z=\frac{\ln X-\mu}{\sigma}\sim N(0, 1)$，$\ln X=\sigma Z+\mu$，$X=e^{\sigma Z+\mu}$，于是我们可以沿着 $U\to Z\to \ln X\to X$ 的路线，得到对数正态分布随机变量的模拟值。例如，$\mu=5.0$，$\sigma^2=4.0$，我们可以由表 2－11 得到相应的对数正态分布随机数。

表 2－11 由 5 个均匀分布随机数模拟对数正态分布随机数

U	z $(\Phi(z)=u)$	$\ln x$ $(=\sigma z+\mu)$	x $(=e^{\sigma z+\mu})$
0.81525	0.90	6.80	897.8
0.29676	-0.53	3.94	51.4
0.00742	-2.44	0.12	1.1
0.05366	-1.61	1.78	5.9
0.91921	1.40	7.80	2 440.6

【例 2－25】 试模拟自由度为 n 的 χ^2 分布随机数。

解：设 X 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，则 $X=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$，其中 Z_i，$i=1, 2, \cdots, n$，都为标准正态分布随机变量，且相互独立。于是，我们可以先生成 n 个标准正态分布随机数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n，再令 $x_1=\sum_{i=1}^{n}z_i^2$，即得到自由度为 n 的 χ^2 分布随机数。

2.3.3 损失次数分布的随机模拟

在非寿险精算中常用泊松分布，负二项分布等离散型随机变量刻画损

失次数。这里介绍离散型随机变量的模拟方法。

反函数法也可以运用于离散型随机变量的模拟。

设要模拟的离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1$，2，…（$x_1<x_2\cdots<x_n$），先生成均匀分布随机数 u，再令

$$x=\begin{cases} x_1 & 0\leqslant u<p_1 \\ x_2 & p_1\leqslant u<p_1+p_2 \\ \cdots\cdots & \\ x_i & \sum_{j=1}^{i-1}p_j\leqslant u<\sum_{j=1}^{i}p_j \\ \cdots\cdots & \end{cases} \tag{2.3.3}$$

可以证明，这样得到的 x，就是离散型随机变量 X 的模拟值。事实上，

$$P(X=x_i)=P\left(\sum_{j=1}^{i-1}p_j\leqslant U<\sum_{j=1}^{i}p_j\right)=\int_{\sum_{j=1}^{i-1}p_j}^{\sum_{j=1}^{i}p_j}du=p_j$$

式（2.3.3）也可以等价地写为：

$$x=x_{i_0},\ i_0=\min\{i\mid u<\sum_{j=1}^{i}p_j\}$$

这种方法适用于任何离散型随机变量，缺点是必须先计算分布列，计算量大。

【例 2－26】 模拟以 $k=6$，$p=0.6$ 为参数的负二项分布随机数。

解：先计算 X 的分布列 $P(X=x)=C_{k+x-1}^{x}p^k(1-p)^x$，$x=0$，1，2，…，将 $k=6$，$p=0.6$ 代入后计算得 $P(X=0)=0.0467$，$P(X=1)=0.1120$，$P(X=2)=0.1568$，…，将计算结果列入表 2－12 内。

表 2－12　　参数为 $k=6$，$p=0.6$ 的负二项分布分布列

X	$p_x=P(X=x)$	$P(X\leqslant x)=\sum_{j=1}^{x}p_j$
0	0.0467	0.0467
1	0.1120	0.1587
2	0.1568	0.3155
3	0.1672	0.4827
4	0.1505	0.6332
5	0.1204	0.7536
6	0.0883	0.8419
7	0.0605	0.9024
8	0.0394	0.9418
9	0.0245	0.9663

续表

X	$p_x = P(X = x)$	$P(X \leqslant x) = \sum_{j=1}^{x} p_j$
10	0.0147	0.9810
11	0.0085	0.9895
12	0.0048	0.9943
13	0.0027	0.9970
14	0.0015	0.9985
15	0.0008	0.9993
16	0.0004	0.9997
17	0.0002	0.9999
…	…	…

根据表 2－12，由 5 个均匀分布随机数生成的负二项分布随机数如表 2－13 所示。

表 2－13

U	x
0.98427	11
0.34914	3
0.70060	5
0.53976	4
0.76072	6

【例 2－27】 模拟参数 $q=1.0$ 的泊松分布随机数。

解： 由泊松分布的分布列 $P(X=x)=e^{-q}\frac{q^x}{x!}$，$x=0, 1, 2, \cdots$，通过计算可得表 2－14。

表 2－14　　参数 $q=1.0$ 的泊松分布的分布列

X	p_x	$\sum_{j=1}^{x} p_j$
0	0.36788	0.36788
1	0.36788	0.73576
2	0.18394	0.91970
3	0.06131	0.98101
4	0.01533	0.99634

续表

X	p_x	$\sum_{j=1}^{x} p_j$
5	0.00307	0.99941
6	0.00051	0.99992
7	0.00007	0.99999
…	…	…

由 5 个均匀分布随机数生成的泊松分布随机数如表 2－15 所示。

表 2－15

U	x
0.00582	0
0.00725	0
0.69011	1
0.25976	0
0.09763	0

泊松分布随机变量的另一种模拟方法是分数乘积法（Product－of－fractions Method）。这种方法的基本原理是：设 $X(t)$ 表示某类随机事件在时间区间$[0, t]$内发生的次数，$X(t)$ 服从以 qt 为参数的泊松分布，即 $P(X(t)=x)=e^{-qt}\frac{(qt)^x}{x!}$。如果用 t_i 表示第 $i-1$ 个这类事件和第 i 个这类事件之间的时间间隔，那么可以证明 t_i，$i=1, 2, \cdots$，都服从以 q 为参数的指数分布，而且相互独立。于是“$X(t)=x$”等价于“$\sum_{i=1}^{x} t_i \leqslant t < \sum_{i=1}^{x+1} t_i$”，由例 2－21 可知，服从以 q 为参数的指数分布的 t_i 可以写成$[0, 1]$均匀分布随机变量 U_i 的函数 $t_i=-\frac{1}{q}\ln U_i$，这样“$X(t)=x$”又等价于“$\prod_{i=1}^{x+1} U_i < e^{-qt} \leqslant \prod_{i=1}^{x} U_i$”。取 $t=1$，则 $X=\min\{x \mid \prod_{i=1}^{x+1} u_i < e^{-q}\}$ 就是所求之泊松分布随机数。

【例 2－28】 由均匀分布随机数列 0.68369，0.10493，0.81889，0.81953，0.35101，0.16703，0.83946，0.35006，0.20226，…生成 $q=0.5$ 的泊松分布随机数。

先计算得 $e^{-0.5}=0.60653$

因为 $0.68369>0.60653$，而 $0.68369\times0.10493=0.07174<0.60653$，所以取 $x_1=1$；

$0.81889>0.60653$，$0.81889\times0.81953=0.67110>0.60653$，$0.81889\times$

$0.81953 \times 0.35101 = 0.23556 < 0.60653$，所以取 $x_2 = 2$；

因为 $0.16703 < 0.60653$，所以取 $x_3 = 0$；

因为 $0.83946 > 0.60653$，而 $0.83946 \times 0.35006 = 0.29386 < 0.60653$，所以取 $x_4 = 1$；

因为 $0.20206 < 0.60653$，所以取 $x_5 = 0$；…

某些离散型随机变量在一定条件下可以看作独立同分布随机变量之和，根据中心极限定理，可以利用正态近似方法进行模拟。

【例 2-29】 参数 q 较大时，利用正态近似方法模拟泊松分布随机数。

设 X 服从以 q 为参数的泊松分布，则 $EX = VaRX = q$，因为 q 较大，根据中心极限定理，$Z = \frac{X-q}{\sqrt{q}}$ 近似地服从标准正态分布，于是，$X = \sqrt{q}Z + q$（四舍五入取非负整数），我们可以沿着 $U \to Z \to X$ 的路线模拟泊松分布随机数。表 2-16 是 $q = 11$ 时，对泊松分布随机数的模拟。

表 2-16　　$q = 11$ 时泊松分布随机数的模拟

U	z ($\Phi(z) = u$)	$\sqrt{11}z + 11$	x
0.91567	1.38	15.58	16
0.17955	-0.92	7.95	8
0.46503	-0.09	10.70	11
0.92157	1.41	15.68	16
0.14577	-1.06	7.48	7

【例 2-30】 参数 k 较大时模拟负二项分布的随机数。

解：设 X 服从以 k，p 为参数的负二项分布，则 $E(X) = \frac{k(1-p)}{p}$，$Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$，当 k 较大时，由中心极限定理，$Z = \frac{X - \frac{k(1-p)}{p}}{\frac{\sqrt{k(1-p)}}{p}}$ 近似地服从标准正态分布，于是，$X = \frac{\sqrt{k(1-p)}}{p}Z + \frac{k(1-p)}{p}$（取非负整数），我们可以沿 $U \to Z \to X$ 的路线生成负二项分布的随机数。

2.3.4 总损失分布的随机模拟

非寿险精算中的赔款总量常常是一个复合分布随机变量。

如果某个险种在一年内的赔款次数 N 是一个离散型随机变量，第 i 次赔款的赔款额 X_i 是一个连续型随机变量，那么，一年内的赔款总额就可以

表示为 N 个随机变量之和，$S=\sum_{i=1}^{N}X_i$，S 就是一个复合分布随机变量。

复合分布随机变量 S 如果满足一定的条件，譬如：X_1、X_2、…具有共同的分布 $F(x)$，N、X_1、X_2、…相互独立，则当 N 服从泊松分布时，称 S 服从复合泊松分布；当 N 服从负二项分布时，S 称为复合负二项分布。

若要模拟复合泊松分布随机变量 S 的观测值，可以先模拟泊松分布随机变量 N 的观测值 n_1，再生成 n_1 个分布函数为 $F(x)$ 的随机数列 x_1、x_2、…x_{n_1}，$s_1=\sum_{i=1}^{n_1}x_i$ 就是复合随机变量 S 的第一个模拟值，重复上述过程就可以得到一列 S 的观测值。

复合负二项分布随机数可以用类似的方法得到。

随机模拟方法在非寿险精算中有广泛的应用，特别是在用理论分布计算有困难或者需要快速得到很长时间才能积累起来的观测值时，随机模拟方法就能显示其独特的作用。这里介绍两个实例。

【例 2－31】 某非寿险公司有一笔 20 辆货运卡车的保险业务，公司打算为这笔业务单独建立一个赔款基金，用于下一年这笔业务的赔款。根据估计：这批 20 辆卡车在一年内的赔款次数 N 服从参数 $q=2$ 的泊松分布；每次赔款的赔款额（以万元为单位）服从自由度为 2 的 χ^2 分布。公司要确定一个数额 C，使下一年这笔业务的赔款总额 S 超过 C 的概率控制在 5%。也就是要确定一个常数 C，使 $P(S>C)=0.05$。

根据前面的讨论，赔款总额 S 是复合泊松分布随机变量，要想通过求 S 的理论分布的方式确定 C 值，是件很困难的事。这时，随机模拟方法就显示了其应用价值和良好效果。

具体做法是：首先生成泊松分布随机数 n_1，再生成 n_1 个自由度为 2 的 χ^2 分布随机数，这 n_1 个随机数之和就是 S 的第一个观测值。如此重复 100 次，就得到本来需要观测 100 年才能得到的数据。在实际应用时，由于使用计算机，所以可以模拟更多的次数，譬如 10 000 次。现在将计算机模拟赔款总量 S 值 100 次的结果，按 S 的模拟值从小到大排列，如表 2－17 所示。

表 2－17　　　　总损失的随机模拟

模拟序号 j	赔款次数 n_j	赔款总额（万元） s_j	模拟序号 j	赔款次数 n_j	赔款总额（万元） s_j
1	0	0	5	0	0
2	0	0	6	0	0
3	0	0	7	0	0
4	0	0	8	0	0

续表

模拟序号 j	赔款次数 n_j	赔款总额（万元） s_j	模拟序号 j	赔款次数 n_j	赔款总额（万元） s_j
9	0	0	41	2	2.41
10	0	0	42	1	2.45
11	0	0	43	1	2.45
12	0	0	44	4	2.48
13	0	0	45	2	2.69
14	0	0	46	3	3.05
15	0	0	47	2	3.16
16	1	0.01	48	2	3.16
17	1	0.36	49	2	3.25
18	1	0.38	50	2	3.41
19	2	0.45	51	1	3.42
20	1	0.48	52	1	3.51
21	1	0.58	53	2	3.54
22	1	0.59	54	2	3.66
23	1	0.59	55	3	3.94
24	1	0.65	56	3	4.67
25	1	0.72	57	3	4.81
26	1	0.83	58	4	4.84
27	1	0.86	59	2	4.86
28	1	0.99	60	2	5.08
29	1	1.05	61	1	5.09
30	2	1.22	62	2	5.10
31	2	1.48	63	2	5.19
32	2	1.58	64	2	5.19
33	3	1.59	65	4	5.39
34	2	1.65	66	3	5.56
35	1	1.66	67	3	5.67
36	1	1.82	68	1	5.90
37	2	2.09	69	1	6.32
38	2	2.15	70	1	6.75
39	2	2.15	71	3	6.86
40	1	2.17	72	2	7.12

续表

模拟序号 j	赔款次数 n_j	赔款总额（万元） s_j	模拟序号 j	赔款次数 n_j	赔款总额（万元） s_j
73	2	7.29	87	4	9.36
74	4	7.33	88	5	9.63
75	3	7.43	89	5	9.83
76	3	7.46	90	5	9.95
77	3	7.51	91	4	10.20
78	4	8.07	92	6	10.73
79	5	8.18	93	4	10.83
80	4	8.42	94	2	12.43
81	2	8.58	95	4	12.58
82	3	8.62	96	6	13.36
83	2	8.66	97	5	13.90
84	4	8.69	98	2	14.31
85	2	8.88	99	6	15.71
86	2	8.89	100	4	18.96

由表 2－17 可以看到，序号为 96～100 的 5 次模拟（模拟次数的 5%），赔款总额至少为 13.36 万元，所以可以用 13.36 万元作为 C 的估计值。

2.3.5 随机模拟的精度与次数

随机模拟的缺点是精度较差，要想提高精度，必须增加模拟次数。模拟次数的确定，除了依赖于精度要求以外，还跟理论分布的形式和它的方差有关。这里举两个例子来说明问题。

【例 2－32】 设随机变量 X 的数学期望和方差分别为 $E(X)=\mu$，$Var(X)=\sigma^2$，现在要用随机数列 X_1、X_2、…、X_n 去模拟随机变量 X，要求 μ 的模拟估计值 $\bar{X}$ 的相对误差不超过 ε 的概率达到 $1-\alpha$，即要使

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\mu}\right|<\varepsilon\right)=1-\alpha,$$

也就是要使

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right|<\frac{n\varepsilon\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)=1-\alpha,$$

根据中心极限定理，$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ 近似地服从标准正态分布，所以，

$$\frac{n\varepsilon\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}=z_{\frac{\alpha}{2}}$$

即

$$n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\varepsilon\mu}\right)^2 \tag{2.3.4}$$

这里的 $z_{\frac{\alpha}{2}}$是标准正态分布的分位点，即 $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}$（以下同）。

如果 $\mu=1.47$，$\sigma=0.56$，$\varepsilon=0.01$，$\alpha=0.05$，查正态分布表得 $Z_{0.025}=1.96$，由式（2.3.4）可以算得 $n=\left(\frac{1.96\times0.56}{0.01\times1.47}\right)^2=5\ 575$。也就是说，要达到上述要求，需要模拟 5 575 次。

【例 2－33】 如果已知随机变量 X 服从参数为 p 的二点分布，则 $E(X)=p$，$VaR(X)=p(1-p)$，要用随机数列 X_1、X_2、…、X_n 模拟随机变量 X，要求 p 的模拟值 $\bar{X}$ 的相对误差不超过 ε 的概率达到 $1-\alpha$。

这个问题实际上是例 2－32 的特例，只要用 $\mu=p$，$\sigma^2=p(1-p)$，代入式（2.3.4）就有 $n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon}\right)^2\frac{1-p}{p}$，如果取 $p=\frac{1}{2}$，则在与例 2－32 同样的 ε 和 α 下，$n=38\ 416$。p 越小，模拟次数 n 越大。

同样的精度要求，需要的模拟次数居然是例 2－32 的 7 倍，问题并不在于已知 X 的分布形式，而是 X 的相对离散程度。进一步分析式（2.3.4），我们可以看到，

$$n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \tag{2.3.5}$$

这里的$\frac{\sigma}{\mu}$我们称之为标准差系数，刻划的是随机变量的相对离散程度。例 2－32 中的$\frac{\sigma}{\mu}=\frac{0.56}{1.47}=0.381$，而本例在 $p=\frac{1}{2}$的假设下，$\frac{\sigma}{\mu}=\sqrt{\frac{1-p}{p}}=1.1^2$ 正好是 0.381^2 的 7 倍。

§2.4 信度理论与方法

2.4.1 有限扰动信度理论

本章第二节例 2－19 得到的二项分布参数 p 在平方损失函数下的贝叶斯估计也可以表示为：

$$\hat{p}_B=\frac{\alpha+x_1}{\alpha+\beta+n}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{n}{\alpha+\beta+n}\cdot\frac{x_1}{n}$$

这实际上是关于参数 p 的先验信息和后验信息的加权平均。其中$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$是 p 的先验分布的数学期望，$\frac{x_1}{n}$是 p 的极大似然估计，$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}$和$\frac{n}{\alpha+\beta+n}$是权重。常把$\frac{n}{\alpha+\beta+n}$记为 Z，称其为信度因子，表示观测值的可信程度，因此，我们也常把这种估计称为可信性估计。显然，$0\leqslant Z\leqslant 1$。当 n 充分大时，Z 接近 1，说明观测数据已提供了足够的信息，并不再需要太多的先验信息了。

所谓信度理论，就是研究如何正确、合理地处理先验信息和后验信息，即研究如何通过加权把两者综合起来的理论。

信度理论（Credibility Theory）萌芽于 20 世纪 20 年代。最早的信度理论被意外险精算师应用于计算劳工赔偿险费率。

在非寿险精算中，信度理论已成为厘定和校正保险费率的重要工具。

假设 X 是损失随机变量，x_1，x_2，…，x_n 是 X 的观测值。有限扰动信度理论（Limited Fluctuation Credibility Theory）假设观测值对于 X 的扰动（即误差）纯粹是由随机因素引起的。所以，也可以说 x_1，x_2，…，x_n 是来自总体 X 的独立同分布的样本。

在非寿险精算中常常把 X 的数学期望 $E(X)=\mu$ 或者对将来损失的估计作为厘定保费的依据。一般来说，μ 是未知的。完全可信性（Full Credibility）理论基于有限扰动信度理论的假设，认为：试图完全依据观测值数据所提供的信息来厘定费率（即要求 $\bar{x}$ 与 μ 充分接近），观测值的个数（样本容量）n 就必须足够地大。具体地说，n 必须满足下述完全可信性条件。

定义 2.1　（完全可信性条件）设 α，γ 为预先给定的比较小的正数，若 n 满足不等式

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\mu}\right|\leqslant\gamma\right)\geqslant 1-\alpha \tag{2.4.1}$$

则称 n 满足完全可信性条件。

式（2.4.1）的实际意义是：满足完全可信性条件的 n，能使 $\bar{X}$ 与 μ 的相对误差比较小的概率比较大。

运用中心极限定理，假设 X 的方差为 $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$，则$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$ 的渐近分布为标准正态分布 $N(0,1)$。根据式（2.4.1），我们有：

$$P(|\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma|\leqslant\sqrt{n}\gamma\mu/\sigma)\geqslant 1-\alpha,$$

因而，

$$\sqrt{n}\gamma\mu/\sigma\geqslant z_{\frac{\alpha}{2}}$$

式中的 $z_{\frac{\alpha}{2}}$是标准正态分布 $N(0,1)$的 $\alpha/2$ 分位点。于是，完全可信性条件

可以简化为

$$n \geqslant \lambda_0 \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 = \lambda_0 \frac{\operatorname{Var}(X)}{[E(X)]^2} \tag{2.4.2}$$

式中 $\lambda_0 = (z_{\frac{\alpha}{2}}/\gamma)^2$ 由 α 和 γ 确定。

【例 2－34】 设赔款次数 X 服从以 λ 为参数的 Poisson 分布，若取 $\alpha = 0.10$，$\gamma = 0.05$，试讨论完全可信性满足的条件。

解： 对于取定的 α 和 γ，$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$，$\lambda_0 = (1.645/0.05)^2 = 1\ 082.41$，因为 X 服从 Poisson 分布，所以 $E(X) = \operatorname{Var}(X) = \lambda$。由完全可信性条件式 (2.4.2)，我们有：

$$n \geqslant \lambda_0 \frac{\operatorname{Var}(X)}{[E(X)]^2} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1\ 082.41}{\lambda}$$

即 $n\lambda \geqslant 1\ 082.41$。$\lambda$ 通常用观测值的平均数 $\bar{X}$ 来估计，所以在 λ 未知时，如果

$$n\bar{X} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant 1\ 082.41$$

就可以认为完全可信性条件成立。

有限扰动信度理论认为：如果观测值的个数 n 不能满足完全可信性条件，那就不能单凭观测值数据中所包含的信息来估计 μ 并由此来厘定费率，还需要利用其他信息（其他公司的信息或本公司其他险种的信息等，也可以是精算师根据实践经验作出的合理推测和判断）。于是就有部分可信性 (Partial Credibility) 理论。

如果用 M 表示根据其他信息得到的损失平均值，那么部分可信性理论认为损失随机变量 X 的数学期望的估计值

$$\hat{\mu} = (1 - Z)M + Z\bar{X} \tag{2.4.3}$$

这里的 Z 称为信度因子 (Credibility Factor)，它是 $\bar{X}$ 在 μ 的估计值中的权重。Z 的值介于 0 和 1 之间，Z 的大小表示 $\bar{X}$ 在估计 μ 时的可信性程度。

对于没有达到完全可信性条件的 n，部分可信性理论要求对取定的 α，γ 满足

$$P\left(Z\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\mu}\right| \leqslant \gamma\right) = 1 - \alpha$$

从而有：

$$P(\,|\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma| \leqslant \sqrt{n}\gamma\mu/(Z\sigma)) = 1 - \alpha。$$

利用中心极限定理，可以求得信度因子

$$Z = \sqrt{n}\gamma\mu/(\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}) = \sqrt{n}/(\sqrt{\lambda_0}\sigma/\mu) \tag{2.4.4}$$

若记 $n_0 = \lambda_0(\sigma/\mu)^2$，则式 (2.4.4) 可以写为 $Z = \sqrt{n/n_0}$，这就是所谓

的部分可信性理论的平方根法则。这里的 n_0 就是式（2.4.2）表示的完全可信性条件中观测值个数 n 的下限。显然，信度因子随 n 的增大而增大。当 $n \geqslant n_0$ 时，完全可信性条件成立，这时可取 $Z=1$。于是，部分可信性理论取信度因子 Z 为：

$$Z=\min\left(\sqrt{\frac{n}{n_0}},\ 1\right)=\min\left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{\lambda_0}},\ 1\right)=\min\left(\frac{E(X)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}}\sqrt{\frac{n}{\lambda_0}},\ 1\right) \tag{2.4.5}$$

在推出一个新险种或者没有损失随机变量的观测值时，精算师只能完全参考其他类似险种或者其他公司的数据，通过合理的推测和判断来估计 μ。这时，信度因子 $Z=0$，$\hat{\mu}=M$。

【例 2-35】 某险种损失随机变量 X 的 100 个观测值的平均数 $\bar{X}=12\ 500$ 元，而完全可信性条件要求的 n 至少为 $n_0=175$。根据其他已开设该险种的公司的数据，平均损失为 $M=10\ 000$ 元。试用部分可信性理论估计 $E(X)=\mu$。

解： 由式（2.4.5），信度因子 $Z=\min(\sqrt{100/175},\ 1)=0.756$。于是由式（2.4.3），

$$\hat{\mu}=(1-0.756)\times 10\ 000+0.756\times 12\ 500=11\ 890$$

2.4.2 风险的异质性及其假设检验

有限扰动信度理论假设历史经验数据的误差纯粹是由随机性引起的。而实际情况有可能不是这样的。历史经验数据的误差除了由随机性引起外，还有可能与某些因素有关。例如，投保载人轿车险的轿车，其品牌和款式不全相同。不同品牌和款式轿车，其历史经验数据的差别比较大。因此，载人轿车险的风险非同质。

首先让我们看一个例子。

【例 2-36】 某保险公司 1996 年的 35 072 辆投保车辆的索赔次数的统计结果见表 2-21（不考虑免赔偿额（Deductible））：

表 2-21

索赔次数	车辆数
0	27 141
1	5 789
2	1 443
3	457
4	155
5	56

续表

索赔次数	车辆数
6	27
7	2
8	1
9	1
≥10	0
总数	35 072

通常假设索赔次数 X 的分布为 Poisson 分布 $P(\lambda)$，索赔次数为 k 的概率等于

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots \tag{2.4.6}$$

λ 的大小反映了保单持有人的风险状况。风险状况越差，λ 的值越大。有限扰动信度理论假设，35 072 辆投保机动车的风险状况是一样的，有相同的 λ。这也就是假设，这些观察数据同分布，它们是来自于 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 的样本。经计算得到，样本均值 $\bar{X}$ 为：

$$\bar{X}=\frac{5\ 789+2\times 1\ 443+3\times 457+\cdots}{35\ 072}=0.3176$$

由此得 λ 的估计值 $\hat{\lambda}=0.3176$。所以在 35 072 辆投保机动车中，索赔次数为 k 的拟合频数为：

$$35\ 072\left(\frac{0.3176^k}{k!}\right)e^{-0.3176},\ k=0,1,2,\cdots$$

实际观测频数和拟合频数的拟合情况如表 2－19 所示，拟合的情况不是很好，尾部（索赔次数比较大）的拟合情况更差。其原因就在于，35 072 辆投保机动车的风险状况实际上并不完全一样。这些机动车辆的品牌和款式很可能不全相同。由于风险具有异质性（Heterogeneity），我们不能假设这些观察数据同分布。它们来自于不同的 Poisson 分布。

表 2－19

索赔次数	车辆数	
	观察频数	拟合频数
0	27 141	25 528.69
1	5 789	8 107.91
2	1 443	1 287.54
3	457	136.31
4	155	10.82

续表

索赔次数	车辆数	
	观察频数	拟合频数
5	56	0.69
6	27	0.04
7	2	0
8	1	0
9	1	0
≥	0	0
总数	35 072	35 072

首先考虑最简单的情况，假设这些观察数据来自于两个不同的 Poisson 分布 $P(\lambda_1)$和 $P(\lambda_2)$的混合，其中来自于 $P(\lambda_1)$的比例为 p，来自于 $P(\lambda_2)$的比例为 $1-p$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$。通过计算（计算从略）算得，p、λ_1 和 λ_2 的估计值分别为 $\hat{p}=0.8876$、$\hat{\lambda}_1=0.1719$、$\hat{\lambda}_2=1.4694$。在 35 072 辆投保机动车中，有 $35\ 072\times 0.8876=31\ 130$ 辆来自于 $P(0.1719)$，他们的风险状况较好；有 $35\ 072\times(1-0.8876)=3\ 942$ 辆来自于 $P(1.4694)$，他们的风险状况较差。在 35 072 辆投保机动车中索赔次数为 k 的拟合频数为：

$$31\ 130\left(\frac{0.1719^k}{k!}\right)e^{-0.1719}+3\ 942\left(\frac{1.4694^k}{k!}\right)e^{-1.4694},\ k=0,1,2,\cdots$$

实际观测频数和拟合频数的拟合情况如表 2－20 所示。

表 2－20

索赔次数	车辆数		
	观察频数	拟合频数	
		单个 Poisson 分布	两个 Poisson 分布的混合
0	27 141	25 528.69	27 120.34
1	5 789	8 107.91	5 838.70
2	1 443	1 287.54	1 366.37
3	457	136.31	501.74
4	155	10.82	177.12
5	56	0.69	51.81
6	27	0.04	12.68
7	2	0	2.66
8	1	0	0.49
9	1	0	0.08
≥10	0	0	0.01
总数	35 072	35 072	35 072

两个 Poisson 分布混合时的拟合的情况比单个 Poisson 分布好得多，尤其是在尾部。尾部概率不能低估，更不能忽略不计。虽然尾部概率很小，但它是发生大损失的概率。保险公司对尾部概率（大损失的小概率）要谨慎从事。三个或更多，甚至无穷多个 Poisson 分布的混合也可被使用，拟合的情况将会更好。

如果这家保险公司不考虑风险的异质性，依据总的样本均值 $\bar{X}=0.3176$，对所有的保单持有人收取同样的保费，则对风险状况为$P(0.1719)$的保单持有人是不公平的，而便宜了那些风险状况为$P(1.4694)$的保单持有人。市场很快就会对此有所反应，风险状况为 $P(0.1719)$的保单持有人会转向其他的保险公司购买保险，而那些风险状况为 $P(1.4694)$的车主就会到这家便宜的保险公司来购买保险。如果这家保险公司不提高保费，那么就这个险种而言，很快就会收不抵赔，财务情况发生困难。所以保险公司考虑风险的异质性，按风险类别分别收取不同的保费是非常必要的。

关于按风险类别分别收取不同保费的问题，一般来说有以下两种处理方法。由于汽车有家用载人、出租汽车、企业载货、公共交通等的区别，它们的风险状况常常不同，所以保险公司按不同的类别设计了不同的险种。这是第一种处理方法。同是家用载人轿车，其风险状况和被保险人的年龄、性别、驾驶经验、汽车的品牌和款式、每年行驶的里程数、使用年数以及停放地点有关。如果保险公司按被保险人和汽车的不同情况将家用载人轿车险种再进一步细分成不同的险种，这样的处理方法势必增加公司的管理费用，至少在经济上是不合算的。人们通常采用的解决方法是：对购买家用载人轿车险种的投保人，根据他们不同的风险特征，收取不同的保费。收取的保费既要考虑该投保人的风险特征，又要考虑家用载人轿车险种总的赔付情况。这第二种处理方法就是本章将要讨论的方法。

在上例，我们假设这些观察数据来自于两个不同的 Poisson 分布$P(0.1719)$和$P(1.4694)$的混合，其中来自于$P(0.1719)$的比例为 0.8876，来自于$P(1.4694)$的比例为 0.1124。这相当于假设，这些观察数据来自于 Poisson 分布 $P(\lambda)$，λ 可能等于 0.1719，也可能等于 1.4694，λ 等于 0.1719 的概率为 0.8876，λ 等于 1.4694 的概率为 0.1124。这相当于说 λ 服从离散型分布，其分布律如表 2－21 所示。

表 2－21

λ	0.1719	1.4694
$\pi(\lambda)$	0.8876	0.1124

此外，λ 也可以服从更加复杂一些的分布，例如取三个，或更多值的离散型分布，甚至连续型分布。就本例索赔次数数据而言，若 λ 取连续型分布，通常假设 λ 服从伽玛分布，其密度函数为：

$$\pi(\lambda)=\frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\gamma\lambda},\ \lambda>0 \tag{2.4.7}$$

其中 $\gamma>0$，$\alpha>0$，γ 和 α 是伽玛分布的两个参数。伽玛分布的密度函数的图形如图 2－4 所示。

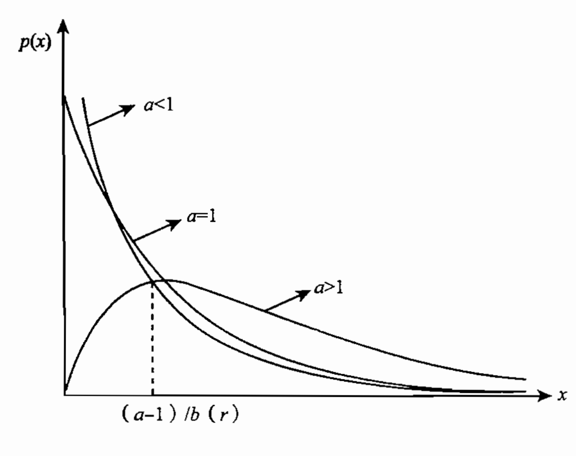


图 2－4

伽玛分布的均值和方差分别是 α/γ 和 α/γ^2。从图 2－4 可以看到，在 $\alpha\leqslant1$ 时，伽玛分布的密度函数严格单调下降。而在 $\alpha>1$ 时，函数是单峰的，峰值点（即众数）位于 $\lambda=(\alpha-1)/\gamma$ 处。所以如果取 $\alpha\leqslant1$ 的伽玛分布作为 λ 的分布，则该险种的投保人，风险状况越好的越多，越差的越少。而如果取 $\alpha>1$ 的伽玛分布作为 λ 的分布，则风险状况居中的投保人多，且两边风险状况好的和差的投保人都越来越少。

在一般情况，可以设随机变量 X 表示某一险种的实际损失。X 可以代表该险种的索赔次数，索赔频率或赔款额。X 的风险大小一般用 θ 来度量。θ 称为风险参数。θ 犹如上面所述的 Poisson 分布中的 λ。若风险同质，θ 取某个固定的值。若风险异质，θ 服从某个分布，其密度记为 $\pi(\theta)$。在 θ 服从离散型分布时，$\pi(\theta)$ 表示分布律；在 θ 服从连续型分布时，$\pi(\theta)$ 表示密度函数。在信度理论中，$\pi(\theta)$ 称为结构函数（Structure Function），而在贝叶斯统计推断中，$\pi(\theta)$ 称为先验分布。在信度理论中，在 θ 给定后，X 的条件概率密度记为 $f(x|\theta)$，并称 X 的边际密度 $f(x)=\int f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta$ 为混合分布，如果 θ 是离散型取值，其中的积分应理解为求和。

结构函数是描述和处理风险异质性的一个重要方法。结构函数的选取，取决于我们对实际情况和贝叶斯统计推断的了解程度。比如，关于索赔次

数数据，通常假设在 λ 给定后，X 的条件分布为 Poisson 分布 $P(\lambda)$。根据贝叶斯统计推断的理论，人们取 λ 的结构函数为伽玛分布。同时人们发现取伽玛分布为结构函数能很好地描述风险的异质性。事实上，如何识别风险的异质性，以及在风险异质时，如何区分风险类别，如何构造结构函数都是实践性很强的问题，依赖于人们的经验，对险种、风险、投保人和市场等的了解程度，依赖于我们搜集到的数据的质量和数量。

下述定理在识别索赔次数数据的风险异质性时很有用：

定理 2－3　风险异质时，总的方差等于条件方差的期望与条件期望的方差之和：

$$\mathrm{Var}(X)=E(\mathrm{Var}(X|\theta))+\mathrm{Var}(E(X|\theta))$$

下面以某保险公司 1996 年的 35 072 辆投保机动车的索赔次数的统计结果为例，介绍贝叶斯统计推断以及统计估计和检验，在识别和处理风险异质性问题中的应用。

必须指出的是，这里的风险指的是索赔次数，不是赔款额。索赔次数的分布往往假设为 Poisson 分布，而赔款额的分布有多种假设。不同的险种，有不同的赔款额的分布假设。所以赔款额数据的风险异质性问题的讨论较索赔次数复杂和困难。本书将不讨论这个问题。由于赔款额数据常常和索赔次数数据在一起，所以通过讨论索赔次数数据，在一定程度上可以识别和处理赔款额数据的风险异质性问题。但必须指出的是，赔款额数据和索赔次数数据是有区别的。比如，某家保险公司发现，女驾驶员发生事故比较多。所以就索赔次数看，对女驾驶员似乎应征收更多的保费。但在男驾驶员发生事故中，损失往往比较大。所以总的来看，还是男驾驶员的赔款额大。对女驾驶员征收的保费应该比男驾驶员少。当然，若平均赔款额相等，则在识别和处理风险异质性时，索赔次数数据的讨论和赔款额数据的讨论是相互等价的。

在风险异质时，按贝叶斯统计推断的理论，Poisson 分布 $P(\lambda)$ 称为在 λ 给定后，索赔次数 X 的条件分布，而式（2.4.6）是索赔次数为 k 的条件概率，记为：

$$P(X=k|\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots$$

则

$$E(X|\lambda)=\mathrm{Var}(X|\lambda)=\lambda$$

λ 的结构函数记为 $\pi(\lambda)$。则

$$E(X)=E(E(X|\lambda))=E(\lambda)$$

根据定理 2－1，我们有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=E(\mathrm{Var}(X|\lambda))+\mathrm{Var}(E(X|\lambda))=E(\lambda)+\mathrm{Var}(E(X|\lambda))\\&=E(X)+\mathrm{Var}(E(X|\lambda))>E(X)\end{aligned}$$

所以在风险异质时，方差比均值大。而在风险同质时，λ 取某个固定的值，比如 λ_0。若风险 X 服从 Poisson 分布 $P(\lambda_0)$，则 $E(X)=\mathrm{Var}(X)=\lambda_0$。所以在风险同质时，方差等于均值。方差比均值大，还是方差等于均值，这是风险异质和同质的一个显著区别。所以识别风险异质性的问题，可以转化为方差是否比均值大的问题。若方差比均值大，则认为风险有异质性。

由表 2-18 所列的数据，算得样本均值和样本方差分别为：

$$\bar{X}=\frac{5\ 789+2\times 1\ 443+3\times 457+\cdots}{35\ 072}=0.3176$$

$$s^2=\frac{5\ 789+2^2\times 1\ 443+3^3\times 457+\cdots}{35\ 072}-0.3176^2=0.4913$$

根据统计假设检验的理论，我们只有在样本方差比样本均值显著地大的时候，才认为方差比均值大。

可以证明（证明从略）：在风险同质时，$\sqrt{n}(s^2/\bar{X}-1)$的渐近分布为正态分布 $N(0, 2)$。由此渐近正态性，我们得到了识别风险异质性的检验方法，如下所述。

首先给定检验的水平 α，$0<\alpha<1$。常取 α 为一些标准化的数，如 0.10、0.05、0.01 等。如果

$$s^2\geqslant \bar{X}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}z_\alpha\right) \tag{2.4.8}$$

我们在水平 α 下，认为方差比均值大，风险有异质性。如本章第一节所述的，z_α 是标准正态分布 $N(0, 1)$的 $1-\alpha$ 分位点。在 $\alpha=0.10$，0.05，0.01 时，$z_{0.10}=1.28$，$z_{0.05}=1.64$，$z_{0.01}=2.33$。

由表 2-18 所列的数据，算得的样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}=0.3176$ 和 $s^2=0.4913$。由于 $n=35\ 072$，所以在 $\alpha=0.10$，0.05，0.01 时，（2-18）式都是成立的。故我们认为方差比均值大。表 2-18 所列的数据具有异质性。

2.4.3 最精确信度理论

最精确信度理论（Great Accuracy Credibility Theory）基于贝叶斯统计的理论。正如我们在本节一开始提到的那个例子，平方损失函数下损失随机变量 X 的分布参数 p 的贝叶斯估计就是一种可信性估计。

但是，由于贝叶斯估计方法需要事先知道参数 θ 的先验分布密度函数和 $\pi(\theta)$条件密度 $f(x|\theta)$，而且计算也较困难。因此，在非寿险精算中，贝叶斯信度并不实用。于是，瑞士精算学家 Buhlmann 提出了用观测值的线性函数作为损失随机变量 X 或者其参数的可信性估计并由此来推算保费的信度模型。

Buhlmann 信度模型假设损失随机变量 X 的分布参数 θ 也是随机变量，在非寿险精算中常把 θ 的不同取值理解为异质风险的不同风险水平，因而也叫

风险参数。记$\mu(\theta)=E(X|\theta)$，$\nu(\theta)=\mathrm{Var}(X|\theta)$，并称$\mu(\theta)$为假设均值，称$\nu(\theta)$为过程方差（Process Variance），它们都是随机变量θ的函数。又记：

$$\mu=E(X)=E(E(X|\theta))=E(\mu(\theta));$$

$$v=E(\mathrm{Var}(X|\theta))=E(v(\theta));$$

$$a=\mathrm{Var}(E(X|\theta))=\mathrm{Var}(\mu(\theta))。$$

这里，$\mu(\theta)$是参数为θ时X的条件期望，而μ则是不同风险参数下X的条件期望的平均，所以μ称为X的总均值。$\nu(\theta)$度量同一风险水平的内在差异，ν为它的均值（Expected Value of The Process Variance），称为X的同质方差。a描述了不同风险水平下的X之间的差异，称为X的异质方差。在 Buhlmann 信度模型中，称μ，ν和a为结构参数（Structure Parameters）。在用贝叶斯方法求可信性估计时，必须事先知道条件密度$f(x|\theta)$和先验分布$\pi(\theta)$。而利用 Buhlmann 模型求可信性估计时，只需要知道结构参数μ，ν和a的值，这并不是一件困难的事。

在这一节，我们只是把信度理论和方法作为非寿险精算常用的一种统计推断方法做简单介绍，至于如何利用信度理论和方法厘定和校正保费，将在第四章详述。

习　题

1. 下表显示了索赔情况调查所揭示的索赔分布情况，画出观察到的分布函数的图形，并用它估计在 150～200 美元之间发生索赔的概率。

索赔额	频数
0～100	45
100～200	10
200～500	23
500～1 000	8
1 000 以上	0

2. 下表概括了某保险公司 100 笔赔款的赔款额状况。若该分布适用对数正态分布模型，求其参数μ和σ的矩估计值，并估计一笔赔款规模超过 4 000 美元的概率。

索赔额	频数
0～400	2
400～800	24
800～1 200	32

续表

索赔额	频数
1 200 ~ 1 600	21
1 600 ~ 2 000	10
2 000 ~ 2 400	6
2 400 ~ 2 800	3
2 800 ~ 3 200	1
3 200 ~ 3 600	1
3 600 以上	0
总数	100

3. 下表给出了 4 000 份保单的赔款情况（不考虑免赔偿额），其中每一保单承担风险期限为 1 年。假定每份保单赔款的次数服从泊松分布，用最大似然估计原理估计泊松分布的参数。

赔款次数	被观察的保单数
0	3 288
1	642
2	66
3	4
总和	4 000

4. 求上题中数据所代表的风险种类的赔款频率的置信度为 95% 的置信区间。

5. 设下表中的理赔记录用韦伯分布来拟合，试用 0.2 和 0.7 分位点估计参数 r。

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.6	0.8	0.95	0.98	1.0

6. 假设某一工业新产品的寿命服从均匀分布，参数为 e，其密度函数为 $f(t)=1/e$。现对 7 件这样的产品进行观察，得到如下的产品余命：3，4，5，7，8，10，12。试求 e 的最小二乘估计。

7. 设某保险人经营某种车辆险，对过去所发生的 1 000 次理赔情况作了记录，平均赔款额为 2 200 元，又按赔款额分为 5 档，各档中的记录次数如下：

赔款额（元）	0～1 000	1 000～2 000	2 000～3 000	3 000～4 000	4 000～5 000	5 000 以上
次数	200	300	250	150	100	0

试用 χ^2 分布检验判断能否用指数分布拟合个别赔款额的分布（假设置信水平为 99.5%）。

8. 对于承保某一类风险，某保险公司将其保费计算基于平均赔款额为 1 200 美元的假定之上。1980 年中，这类保险项目发生了 1 243 次赔款，平均额为 1 283.70 美元，其观察值的标准差等于 1 497.31 美元。是否有证据能说明该公司在计算保险费率时所假定的平均赔款额太低了呢？

9. 从一组有效保单中抽取 100 份，发现有 3 个索赔，假如该险种的索赔频率 θ 的先验分布为贝塔（2，200），求 θ 的后验分布均值。

10. 设 40 张同类保单，用 X_i 表示第 I 张保单的索赔次数，并设 $X_i \sim P(\lambda)$，$i=1, 2, \cdots, 40$，又设参数 λ 为随机变量，且服从均值为 0.6，方差为 0.02 的伽玛(α, β)分布，并且已知观察到 40 张保单共有 18 次索赔，试计算在平方损失函数下 λ 的贝叶斯估计。

11. θ 是某险种的索赔频率，抽取 8 份保单，发现在有效期内有 3 次索赔，假如先验分布为：

（1）$\theta \sim U(0, 1)$

（2）$\theta \sim f(\theta)=2(1-\theta), 0<\theta<1$

分别求 θ 的后验分布。

12. 已知四个均匀分布的随机数：

$u_1=0.92643004$　$u_2=0.01371352$　$u_3=0.72750818$　$u_4=0.14432129$

求出相应的参数为 2 的指数分布的随机数。

13. 已知如下均匀分布的随机数：

$u_1=0.7295$　$u_2=0.5437$　$u_3=0.4649$　$u_4=0.6305$　$u_5=0.5618$

$u_6=0.9602$　$u_7=0.9057$　$u_8=0.8799$　$u_9=0.0198$　$u_{10}=0.938$

$u_{11}=0.5462$　$u_{12}=0.3021$　$u_{13}=0.7659$　$u_{14}=0.6768$　$u_{15}=0.3209$

用中心极限定理产生 $N(0, 1)$分布的随机数。

14. 已知两个 $N(0, 1)$分布的随机数为 0.90 与 -1.61，求相应的参数 $\mu=5.0$与 $\sigma^2=4.0$ 的对数正态分布的两个随机数。

15. 已知参数为 $k=6$，$p=0.6$ 的负二项分布，$u_1=0.345$，$u_2=0.789$，u_1 与 u_2 是$[0, 1]$区间上均匀分布的随机数，求 u_1，u_2 相应的负二项分布的随机数。

16. 用分数乘积法求参数为 0.5 的泊松分布的 5 个随机数。

17. 某保险公司在某种业务中有 100 笔索赔款，已在题 2－2 中给出。根据题 2－2 计算的 $\bar{X}$ 和 s，计算满足完全可信性($\alpha=0.10$，$\gamma=0.05$)条件

的最小样本容量 n_0。

18. 在上题中的保险公司在其未满期业务中有 19 307 张保险单。其总的风险保费为 366 833 美元，一年内索赔总额为 340 575 美元。试求保险公司在下一年对每张保险合同应收取的风险保费的可信性估计值。

19. 某家保险公司的 2 612 辆投保车辆的索赔次数数据见下表：

索赔次数	车辆数
0	1 937
1	584
2	90
3	1
4 +	0
合计	2 612

(1) 试根据式 (2.4.4)，判断该车辆险的风险是否异质。

(2) 若风险同质，试列表比较实际频数和 Poisson 分布的拟合频数。

(3) 若风险异质，取伽玛分布为结构函数，用负二项分布拟合索赔次数数据，试求伽玛分布参数的估计值，并列表比较实际频数、Poisson 分布的拟合频数和负二项分布的拟合频数。

20. 某家汽车保险公司的汽车索赔次数数据见下表：

索赔次数	车辆数
0	103 704
1	14 075
2	1 766
3	255
4	45
5	6
6	2
7 +	0

(1) 试根据式 (2.4.4)，判断该车辆险的风险是否异质。

(2) 若风险同质，试列表比较实际频数和 Poisson 分布的拟合频数。

若风险异质，取伽玛分布为结构函数，用负二项分布拟合索赔次数数据，试求伽玛分布参数的估计值，并列表比较实际频数、Poisson 分布的拟合频数和负二项分布的拟合频数。

第三章　非寿险费率厘定

学习目标

- □ 掌握非寿险定价的基本原理，学会用损失率法和纯保费法对非寿险产品进行定价
- □ 掌握均衡已赚保费的计算和最终损失的预测，学会用危险扩展法和平行四边形法则计算均衡已赚保费，用损失进展法预测最终损失
- □ 掌握分类费率厘定的基本方法和冲销产生的原因，学会计算新的级别相对数，冲销因子
- □ 掌握效用理论下非寿险产品的定价，学会从投保人和保险人的效用出发计算可接受保费，以及最优保险问题

§3.1　引　　言

费率厘定与保险定价是两个不同的概念。费率厘定是保险公司在期望理赔金额和理赔次数的基础上确定充分费率的过程。这就是说，费率厘定是要决定这样一个费率，它能提供足够的资金去支付预期的损失和费用，并且能给保险公司产生一个合理的回报。保险定价在充分费率的基础上，还需要考虑公司的市场份额目标与竞争环境等众多因素。所以保险定价和费率厘定是有区别的。费率厘定属于技术层面，而保险定价属于决策层面。本章着重考察保险产品的费率厘定，介绍费率厘定的一般理论与方法。

保险人在费率厘定过程中要满足以下几个基本目标：

1. 费率应足够保险人支付期望赔付和费用。保险人的收入主要包括保费收入和投资收入，支出主要包括所有的赔付、与赔付相关的费用、保费税、销售费用（如佣金）以及各个部门的营运费用。这个目标能保证保险人的收入不低于支出，这是保险公司稳定经营的前提。

2. 费率中还应包含风险附加部分，以应付不可预期的事件的发生。风险附加的额度要适中，定得过高，会因为费率过高而流失部分客户，但定得过低又会起不到应付意外事件的作用。

3. 费率系统应鼓励被保险人进行损失控制。对于那些具有优良风险控制的保单，保险公司应该按较低费率收取保费，以鼓励风险控制。例如，对火灾保险，保险公司应对安装自动喷淋系统的标的物采用较低费率。

4. 费率水平要合理稳定。频繁调整费率，不但成本高昂，而且极易在

客户中产生不良影响，甚至招致监管部门的干涉。

5. 费率要满足监管部门的要求。监管部门通过法律法规对保险费率加以限制，监管部门最基本的要求是费率必须充足，但不能过高，不允许出现对被保险人不公正的区别对待。

6. 制订出来的费率要简单易懂。厘定的费率应该便于保险代理人、保险经纪人和公司的高管理解，从而得到他们的支持，顺利开展业务。

下面我们将介绍费率厘定中的一些基本术语。

3.1.1 危险单位及危险量

危险单位（Exposure Unit），又称风险单位，是保险标的发生一次灾害事故可能造成的最大损失范围。它是费率厘定的基本单位，每个危险单位的保费称为费率。危险单位的划分应该本着科学、谨慎和合理的原则进行。危险单位划分的标准是坐落于同一地点的两（多）项保险财产彼此安全区隔，发生于其中一项财产的保险事故不会同时影响另一项保险财产。同一保单下的保险财产如果符合上述危险单位划分的标准，该保单可以进行危险单位划分。同一地点不同保单下的保险财产如果可能受到同一保险事故的影响，上述保单下保险财产应合并视为一个危险单位。最大损失范围应以最大可能损失（Maximum Possible Loss）为判断基础。最大可能损失是指在所有保护系统失灵，相关应急处理人员以及公共救灾机构无法提供任何有效救助的情况下，单一设施可能遭受的财产损失以及营业中断损失的合计最大金额。对于火灾风险而言，这意味着“完全焚毁”的状态。在这一情景下，只有充分的区隔距离以及完整无隙的防火墙（即防火墙上不能开有通口，即使这些通口有防火门一类设施遮蔽）才能有效阻止火势蔓延。简单说，最大可能损失是主动保护系统无效情景下的可能最大损失。

不同的保险项目有不同的危险单位。对于汽车险，危险单位常取为车年。一辆保险期限为 6 个月的投保车辆是 0.5 个危险单位。一份为三辆汽车提供 6 个月保险的保单包含了 1.5 个危险单位。

给定险种的危险单位的设定依赖于若干个因素，例如合理性、可行性和对于变化的敏感性等。例如对于汽车险，行驶公里和油耗都可以作为危险单位。它们都比车年更合理，更具有对于变化的敏感性。但是每行驶一公里的赔款和每一吨油耗的赔款的计算，比每一车年的赔款的计算困难得多。它们的分子是相同的，都是总的赔款，而分母是危险单位的总的数量。若取行驶公里和油耗作为危险单位，分母很难得到。若取车年作为危险单位，分母容易得到。所以对于汽车险，行驶公里和油耗作为危险单位都是不可行的。

以往和现在的危险单位应尽可能保持一致，这是因为危险单位的任何

变化都会使积累的历史经验统计数据完全或部分失效。由于费率厘定依赖于对历史经验统计数据的分析和推断，因此危险单位一经确定就不轻易改变。

每张保单的危险单位总数称为此保单的危险量（Exposures）。最常用的危险量是已签危险量（Written Exposures），已承担危险量（Earned Exposures）和有效危险量（In-force Exposures）。在一段时间内的已签危险量指已签的保单在某个时间段内在签单时的所有危险单位数量，用来刻画签单时的总危险量。保单的已签危险量由签单日是否在该时间段内决定，如签单日在该时间段内，则有危险量；如不在，则没有危险量。已承担危险量指各个相应时间段内已经承担责任的危险单位数量。有效危险量指在一个给定的时刻危险单位数量。为了给出这三个危险量的直观解释，考虑 4 个保险期限为 12 个月的一辆车的汽车保单（如表3－1所示）。

表 3－1

签单日期（月/日/年）	已签危险量		已承担危险量		有效危险量
	2009	2010	2009	2010	1/1/2010
1/1/2009	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
4/1/2009	1.00	0.00	0.75	0.25	1.00
7/1/2009	1.00	0.00	0.50	0.50	1.00
10/1/2009	1.00	0.00	0.25	0.75	1.00
合计	4.00	0.00	2.50	1.50	3.00

由于所有保单都是在 2009 年签订的，所以在 2009 年每张保单的已签危险量都是 1.00，而在 2010 年每张保单的已签危险量都是 0.00。对于在 2009 年 4 月 1 日签订的保单在 2009 年的有效期间为 0.75，在 2010 年的有效期间为 0.25，所以在 2009 年和 2010 年的已承担危险量分别为 0.75 和 0.25。此外，我们注意到，有效危险量不管剩余期限的长度，把每个到 2010 年 1 月 1 日仍然有效的以 12 个月为期限的保单计为一个完整的车年。

3.1.2 损失和损失调整费用

根据保单的条款，已付和应付给索赔人的数额称为损失（Losses）。已付损失（Paid Losses）指在一个特定时期实际已经支付给索赔人的损失。对每一个在预期的未来将有支付发生情形的索赔，需要有个案准备金（Case Reserve）。它是未来支付数额的估计。某个事故年（Accident Year）所有已付损失和个案准备金的总和称为事故年已发生损失（Case-incurred Losses）。已发生损失和最终损失（Ultimate Incurred Losses）是有区别的。最终损失包括在计算已发生损失时还没有报告到保险公司的损失，我们后

面提到的损失都是最终损失。

随着时间的推移，当更多的损失被支付以及有关未付索赔的更多的信息可以被利用时，事故年的已发生损失将趋向于它们的最终损失。一般来说，由于新赔案的不断报告，事故年已发生损失将随着时间的推移而增加。为跟踪一个事故年的已发生损失的个案的评估，我们将采用事故年年龄（Accident Year Age）这个概念，事故年年龄也叫进展年。事故年年龄一般以月为单位，进展年一般以年为单位。按惯例，到某事故年的最后一天，该事故年具有 12 个月的年龄。因此，在 6/30/2009 对事故年 2008 年已发生损失的评估被称为事故年 2008 年已发生损失在年龄 18 个月时的评估。图3－1是某个已发生损失的变化情况的图形解释。

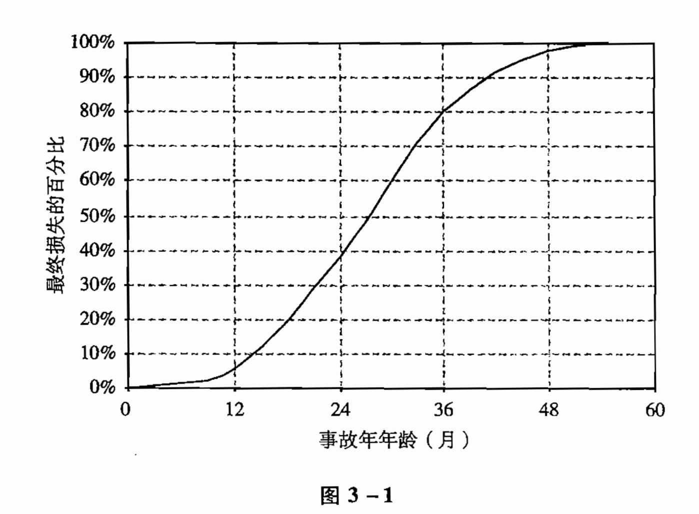


图 3－1

保险公司为处理索赔的费用除损失外，还有一笔费用称为损失调整费用（Loss Adjustment Expense）。那些与索赔直接相联系的损失调整费用称为分摊损失调整费用（Allocated Loss Adjustment Expense），而不直接相联系的称为非分摊损失调整费用（Unallocated Loss Adjustment Expense）。分摊损失调整费用在厘定费率的时候常与损失放在一起作为一个整体考虑。非分摊损失调整费用包括理赔部门的内部成本，它在各个公司之间是不同的。雇佣外部的损失评定人员来检查与执行索赔处理的公司把这种费用包括在索赔费用中。它属于分摊损失调整费用。而用自己公司的人员进行损失评定的公司则将其作为内部的索赔费用。它属于非分摊损失调整费用。

3.1.3 保费

保费主要包括以下三个部分：

1. 用于支付赔款的部分，即通常所说的纯保费。

2. 用于支付费用的部分，如代理人佣金、管理费用、理赔费用、保费

税等。

3. 利润及风险附加部分。

纯保费（Pure Premium）定义为每危险单位的平均损失。纯保费的计算公式为：

$$P=\frac{L}{E} \tag{3.1.1}$$

其中：P 为纯保费；L 为损失，通常指经验期里的最终损失；这里的损失 L 除了保险公司已付和应付给索赔人的损失外，还要加上损失调整费用；E 为危险单位总数，是经验期里的已承担危险量。

纯保费也可以表示为每危险单位的索赔频率与索赔强度的乘积：

$$P=\frac{C}{E}\times\frac{L}{C}=F_r\times D_e \tag{3.1.2}$$

其中，C 为索赔总次数；F_r 为索赔频率（每危险单位的索赔次数）；D_e 为索赔强度（每个索赔的平均损失）。

厘定费率时，除了包含在纯保费中的各种损失调整费用外，还得考虑其他一些费用。其中有的费用随保单价格的变化而变化，称为可变费用（Variable Expenses）；有的则和保单的价格无关，称为固定费用（Fixed Expenses）。此外，还得考虑利润。

根据危险单位的分类，保费也分为已签保费（Written Premium）、已承担保费（Earned Premium）和有效保费（In-force Premium）。已承担保费也叫已赚保费。

3.1.4 损失率（Loss Ratio）

损失率是在保险损失分析中使用最广泛的一个统计量。它等于损失除以保费。损失率可以基于纯损失而不包括各种损失调整费用，也可包括分摊的或总的损失调整费用。损失可以是已付的，已发生的，或者预测的最终损失。而保费可以是已签或已承担保费。这种不同的选择将导致不同的结果，有可能造成混淆。这要求我们必须准确地叙述损失率。下面的两个损失率有很大的不同。一个是到事故年年龄为 12 个月的基于已付损失及已签保费的损失率，另一个是基于最终损失和损失调整费用及已承担保费的损失率。我们后面定价中用的损失率是后者。

§3.2 纯保费法和损失率法

费率厘定就是要确定未来的费率水平，我们称为指示费率。本节将介绍实务中确定指示费率的两种基本方法：纯保费法（Pure Premium Method）和损失率法（Loss Ratio Method）。并分析两种方法之间的关系。

3.2.1 纯保费法

纯保费法通过在纯保费上附加各种必要的费用和利润得到指示费率。纯保费法可表示如下：

$$R = \frac{P + F}{1 - V - Q} \tag{3.2.1}$$

其中，R 为每危险单位的指示费率；P 为每危险单位的纯保费；F 为每危险单位的固定费用；V 为可变费用因子；Q 为利润因子。

纯保费 P 可由（3.1.1）来计算。

【例 3－1】 健康保险有如下信息：

纯保费	8 600 元
固定费用	800 元
可变费用因子	15%
利率因子	5%

试计算该险种的费率。

解： 由公式（3.2.1）可得，费率为

$$R = \frac{8\ 600 + 800}{1 - 0.15 - 0.05} = 11\ 750$$

该费率的各个组成部分如下（单位元）：

纯保费	8 600 元
固定费用	800 元
可变费用	1 762.5 元
利润	587.5 元
总计	11 750 元

3.2.2 损失率法

损失率法首先根据损失率计算费率的调整幅度（即费率调整因子），然后对当前的费率进行调整得到指示费率。其计算公式如下：

$$R = AR_0 \tag{3.2.2}$$

其中 R 表示指示费率，R_0表示当前费率，A 表示费率调整因子。

在损失率法中，关键是计算费率调整因子。费率调整因子等于经验损失率 W 与目标损失率 T 的比，即

$$A = \frac{W}{T} \tag{3.2.3}$$

经验损失率是经验期内的最终损失 L 与已赚保费之比。在一般情况下，经验期包括若干年。经验期期间的费率水平通常会发生变化，我们计算保费时必须用一个统一的费率，即当前费率水平。根据当前费率水平算得的

保费称为均衡已赚保费（on-level earned premium），其等于经验期里的已承担危险单位的数量 E 与当前费率 R_0的乘积，即

$$W=\frac{L}{ER_0} \tag{3.2.4}$$

目标损失率可写为：

$$T=\frac{1-V-Q}{1+G} \tag{3.2.5}$$

其中，V 为可变费用因子；Q 为利润因子；G 为每危险单位的固定费用与纯保费之比，即

$$G=\frac{F}{P} \tag{3.2.6}$$

因此，由式（3.2.4），式（3.2.5）可得：

$$A=\frac{L/(ER_0)}{(1-V-Q)/(1+G)}=\frac{L(1+G)}{ER_0(1-V-Q)} \tag{3.2.7}$$

将式（3.2.7）代入式（3.2.2）得：

$$R=\frac{L(1+G)}{E(1-V-Q)} \tag{3.2.8}$$

【例 3－2】 假设在过去一年里，某个健康保险的收入和支出的费用如表 3－2。

表 3－2 单位：元

承保保费	11 540 000
已赚保费	10 832 000
已发生损失和分摊损失调整费用	7 538 000
非分摊损失调整费用	484 000
佣金	1 731 000
税收、执照及其他费用	260 000
其他承保费用（展业费用）	646 000
一般管理费用	737 000
总的损失和费用	11 396 000

并假定利润因子为 0，求目标损失率。

解： 由式（3.2.5）知，$T=(1-V-Q)/(1+G)$，其中，V 为与保费有关的费用因子；Q 为利润因子；G 为与保费无关的费用与损失之比。为了求得目标损失率，我们需要知道费用因子 V 和 G。

分摊损失调整费用与索赔直接相联系，而非分摊损失调整费用不直接与索赔相联系。这样我们可确定式（3.2.5）中 G 的值，它等于非分摊损失调整费用 484 000 元除以已发生损失和分摊损失调整费用的和 7 538 000

元，得 $G = 484/7\ 538 = 0.0642$。

式（3.2.5）中 V 值是与保费有关的其他费用与保费之间的比例。现在的问题是，这里的保费是承保保费，还是已赚保费？由于佣金和保费税收一般都是将承保保费作为基数而直接支付的，因此承保保费是这些费用的分母；其他承保费用（展业费用）是为了吸引保费而支出的，因此同样可把承保保费作为它的分母；但一般管理费用并不是与承保保费直接相联系的。倘若保险公司停止承保，也不能立刻免除一般管理费用，因此通常将已赚保费作为一般管理费用的分母。

根据以上分析，V 值的计算方法如下：

佣金与承保保费的比	$1\ 731\ /\ 11\ 540 = 0.1500$
税收、执照费用与承保保费的比	$260\ /\ 11\ 540 = 0.0225$
其他承保费用与承保保费的之比	$646\ /\ 11\ 540 = 0.0560$
一般管理费用已赚保费的之比	$737\ /\ 10\ 832 = 0.0680$
与保费有关的费用因子合计	$V = 0.2965$

因此，可得目标损失率

$$T = \frac{1 - 0.2965 - 0}{1 + 0.0642} = 0.6611$$

3.2.3 纯保费法与损失率法的关系

我们首先从数学上证明用纯保费法与损失率法进行费率厘定得到的结果是一致的。

由式（3.1.1）知

$$L = EP \tag{3.2.9}$$

将式（3.2.9）代入式（3.2.8）得：

$$R = \frac{EP\ (1 + G)}{E\ (1 - V - Q)} = \frac{P + PG}{1 - V - Q} = \frac{P + F}{1 - V - Q}$$

即为纯保费下的指示费率。因此，两种费率厘定方法的结果是一致的。

因为用这两种方法是等价的，因此产生了在实际问题中用哪一种方法更合适的问题。首先让我们来考查一下，它们有哪些差异，如表 3 - 3 所示。

表 3 - 3

纯保费法	损失率法
基于危险单位	基于保费
不需要当前费率	需要当前费率
不需要使用均衡已赚保费	使用均衡已赚保费
得到新费率	得到新费率关于当前费率的比值

由这些差异可以得到如下结论：

纯保费法是建立在每个危险单位的损失基础上的，它需要严格定义的危险单位。若危险单位不知道或各危险单位间有差异，比如，火灾险的情形，则纯保费法不适用。

因为损失率法得到的是当前费率的变化，所以它需要当前的费率和保费的历史记录。而新业务的费率厘定，我们只能利用相关公司或相关险种的损失数据，没有历史记录，那么只能使用纯保费法。损失率法不适用于新业务的费率厘定。当然，如果没有任何的统计数据可用，则这两种方法都不适用。

损失率法需要的是当前水平已赚保费，所以在当前水平已赚保费难以计算时，纯保费法更为适用。在某些险种中，对保单需要进行个体风险的费率调整，此时就很难确定损失率法中需要的当前水平已赚保费，在这种情况下若采用纯保费法更为合适。

3.2.4　注意事项

不论选择哪种费率厘定方法，都需要确保经验损失必须与正在使用的危险单位和保费相一致。这要求对数据中观察到的不一致（如果有的话）做出相应的调整。下面将论述产生数据中的不一致情况的来源，并讨论处理它的方法。

1. 经验期的选择。费率厘定过程中使用的损失经验期的选择需要统计学的和主观判断的结合。一般来说，最近期发生的损失经验数据最能代表当前的状况，因此一种自然的选择便是使用可以获得的最近期的损失经验数据，而同时这样的损失经验数据很可能比成熟期（指具有较多的已经结案的保单的经验期）包含了更高比例的未付损失，因此更有可能会在对损失进行预测时带来误差。其次，当所涉及的业务会有灾害性的损失时，比如，在易出现龙卷风地区的风暴险项目，经验期必须足够长，以便于能代表灾害的平均发生率。最后，经验期必须包含足够的损失经验数据以使最后的结果具有统计的可信性。这是一般的统计推断应该遵循的原则。在费率厘定时也要遵循这个原则，损失经验数据不能太少。

2. 再保险的影响。再保险用来降低保险人面临巨大损失的风险，这种风险可能是单个的也可能是聚合的。一般来说，费率的分析要基于再保险之前的保费和损失数据。当再保险的成本很大时，再保险费经常作为费用准备的一个独立的部分。

3. 保险项目的差异。如果可能，一个保险业务中各个主要的保险项目应该分别处理。比如，房屋险保单下的责任经验损失数据通常是与财产经验损失数据分开考察的。汽车碰撞数据也是根据免赔额的大小而分开分析的。不仅各项目的经验损失数据要分开考察，而且保费和危险单位数据也要分离。

4. 提高限额时的处理方法。在责任险中，每份保单通常会规定一个限额（Limit）。当索赔发生时，保险公司的赔付不超过限额。比如说，限额是 u 而实际的损失是 X（包含固定费用），则当损失 X 不超过 u 时，保险公司的赔付为 X；而当损失 X 超过 u 时，保险公司的仅赔付 u。也就是说，保险公司的赔付为 Min（X，u），费率为 $E[\mathrm{Min}(X,u)]$。在实践中，保险公司通常会对同样的标的提供不同的限额，供投保人选择。最低的限额叫基本限额（Basic Limit），其他限额叫提高限额（Increased Limit）。责任险费率的厘定首先确定基本责任限额的费率，然后厘定出提高限额因子。更高的限额的费率等于基本限额费率乘以提高限额因子（Increased Limit Factor）。例如，某保险公司提供两种限额，u_1 和 u_2，$u_1 < u_2$，u_1 称为基本限额，而 u_2 称为提高限额，基本责任限额的费率为 $E[\mathrm{Min}(X,u_1)]$，而提高限额的费率为 $E[\mathrm{Min}(X,u_2)]$。若记提高限额因子为 ILF，则有

$$\mathrm{ILF}=\frac{E[\mathrm{Min}(X,u_2)]}{E[\mathrm{Min}(X,u_1)]}$$

所以，若基础限额的费率为 R_1，则提高限额的费率为 $R_2 = R_1 \times \mathrm{IFL}$。

这些提高限额因子会随时间变化。另外，当通货膨胀影响购买力时，投保人一般会倾向于购买有更高限额的保险产品。因此，在费率厘定过程中，应该将不同限额下的保费和损失调整到基本限额的基础上。

§3.3 均衡已赚保费和最终损失

通过上一节的介绍我们知道，在用损失率法进行费率厘定时的一个关键问题是计算均衡已赚保费。在这一节里我们将介绍如何计算均衡已赚保费。

同时，无论在纯保费法还是损失率法中都需要用到最终损失数据。然而由于大多数险种，每个事故年的赔款支出都存在延迟。要经过数年甚至数十年才能得到最终损失。因此，在费率厘定中，就需要根据已付损失预测最终损失。在本节中，我们将介绍最终损失预测的方法。

3.3.1 均衡已赚保费

均衡已赚保费的计算主要有两种方法：危险扩展法和平行四边形法。

如果时间和能力上允许，我们可以对每份保单都使用当前费率重新计算。用手工做这件事需要太多的时间因而并不现实，但如果计算机配置得好，并且有厘定费率的软件可供使用，则使用计算机计算均衡保费将会十分简便、准确。这种计算方法称为危险扩展法（Extension of Exposure Technique）。

当危险扩展法不适用时，可使用平行四边形法进行近似估计。该方法假定危险单位在经验期内均匀分布。根据简单几何关系，可将各日历年的

已赚保费调整到当前费率水平上。例如，假设考察的损失经验期包括2006年、2007年、2008年，并假定各个保单的保险期限为12个月，最后设费率增长情况如下：

+17.8%	7/1/2003 生效
+12.5%	7/1/2005 生效
+10.0%	7/1/2007 生效

我们先来研究经验期的第一年。由于这些保单的保险期限为12个月，因此，经验期的第一年即2006年的承担危险有的是在7/1/2003费率水平上承保的，有的是在7/1/2005费率水平上承保的。若假设7/1/2003费率水平相对值为1.000，则7/1/2005费率水平相对值是1.125，7/1/2007费率水平的相对值为1.125×1.100 =1.2375。

图3-2提供了一种平行四边形法下的数据表示。X轴代表保单生效日，Y轴表示承担危险比例。

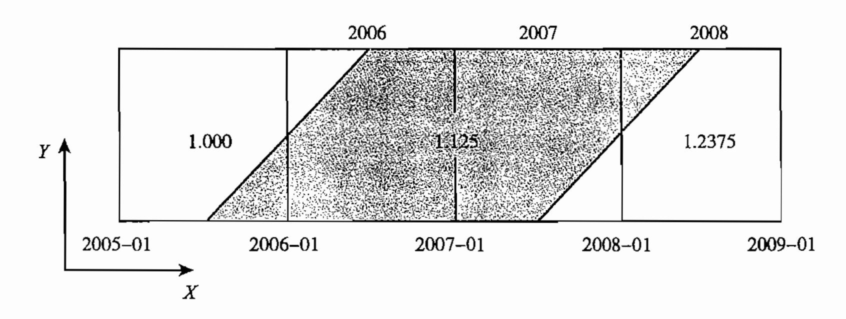


图3-2　当前费率保费的进展

这样各日历年的已赚保费都可看做分布在一个单位的正方形内。该正方形宽为一年，高为危险的100%。图3-3即是对2006年的已承担危险进行这种处理的结果。

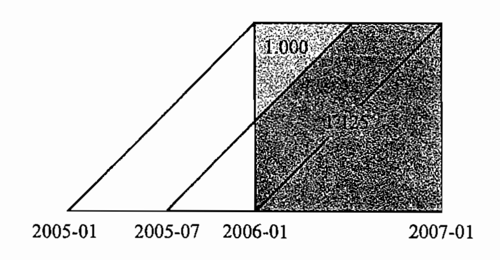


图3-3　当前保费因子

由于危险单位在经验期内均匀分布，所以我们可用简单的几何比例关系来推算，日历年2006年中分别在1.000和1.125相对水平上承保的已承担危险的比例，如图3-4所示。

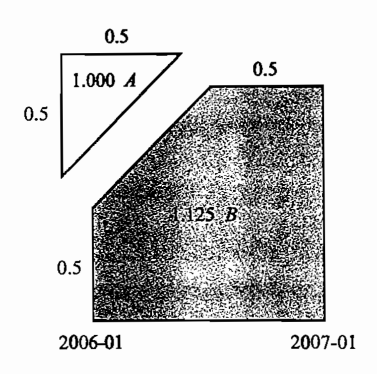


图 3－4

根据平行四边形模型，2006 年的已承担危险中的 0. 125（＝0. 5 ×0. 5/2，即图3－4中 A 的面积）是在 1/1/2005 和 7/1/2005 之间承保的。它们的相对费率水平是 1. 000。而已承担危险中的 0. 875（＝1－0. 125，即图 3－4 中 B 的面积）是在 1. 125 的相对费率水平上承保的。因此 2006 年相对费率的平均水平为

$$(0.125 \times 1.000) + (0.875 \times 1.125) = 1.1094。$$

由于当前相对费率水平是 1. 2375，因此日历年 2006 年的承担保费必须乘以 1. 2375/1. 1094＝1. 1155 来反映现时的费率水平，这里 1. 1155 称为 2006 年等费率因子（On-level Factor）。

对 2007 年和 2008 年重复上述方法计算，可得如表 3－4 所示的结果：

表 3－4

日历年	在相对水平下承担危险的比例			等费率因子
	1. 000	1. 125	1. 2375	
2006	0. 125	0. 875	0. 000	1. 1155
2007	0. 000	0. 875	0. 125	1. 0864
2008	0. 000	0. 125	0. 875	1. 0115

各年的等费率因子分别乘以各日历年的已赚保费就可近似得到当前等费率已承担保费，即均衡已赚保费，如表 3－5 所示。

表 3－5

日历年	日历年承担保费	当前费率因子	均衡保费（近似）
2006	1 926 981	1. 1155	2 149 547
2007	2 299 865	1. 0864	2 498 573
2008	2 562 996	1. 0115	2 592 470
合计	6 789 842	—	7 240 590

正如前面指出，平行四边形法基于这样一个假设，即危险单位在各日历年期间均匀地承保。若在经验期内危险单位的水平有明显变化或者危险单位的承保具有非均匀的模式，平行四边形法就不能得出均衡已赚保费的合理近似。

3.3.2　最终损失的预测——损失进展法

我们现在将讨论如何预测最终损失，以及如何对其趋势进行分析的基本方法。由于经验数据中不可避免地包含有未决赔款保单的数据，最终损失的预测和对最终损失的趋势的分析是费率厘定工作中最重要的组成部分，需要统计的专业技术和精算师的经验判断。不论采用纯保费法还是损失率法，损失预测的准确性都将决定厘定的费率是否适当。

未赔付（并且经常是未报告）损失的最终值的预测方法和技术是费率厘定过程中的基本技术之一。本节介绍最终损失和索赔次数的最常用的预测方法，即损失进展法（Loss Development）。

损失进展法基于这样的假设，即赔案发生之后，索赔以某种模式经历“未报告→已报告未赔付→赔付完毕”这一过程，并且这样的模式是平稳的，和赔案何时发生没有关系。这个假设使得过去的经验可以用来预测将来的发展。累积损失都分别按事故年（或报告年，或其他原则）与进展年排列。这样一来，观察到的数据就形成了一个流量三角形。表 3－6 是某险种的累积已发生损失数据构成的流量三角形。

表 3－6　　　　累积已发生损失的流量三角形

事故年	进展年					
	1	2	3	4	5	6
2003	1 804	2 173	2 374	2 416	2 416	2 416
2004	1 935	2 379	2 424	2 552	2 552	
2005	2 103	2 384	2 514	2 646		
2006	2 169	2 580	2 722			
2007	2 346	2 783				
2008	2 337					

由该流量三角形，我们能看出，比如，在 2004 年发生的保险事故，到 12/31/2006 为止已有 2 424 元的累积损失，到了 12/31/2007 累积损失已经达到 2 552 元。这种横向的自左向右的变化表示同一个事故年发生的赔案已发生的累积损失金额的进展情况。而纵向向下的变化则表示不同事故年在同一个进展年的累积损失金额，而由左下至右上的对角线则代表了同一个会计年度末的记录。最下面的对角线代表最近一个会计年度末，即 12/31/

2008 各个事故年的累积损失金额的情况，如表 3 -7 所示。

表 3 -7　　到 12/31/2008 各事故年已发生的累积损失

事故年	进展年					
	1	2	3	4	5	6
2003						2 416
2004					2 552	
2005				2 646		
2006			2 722			
2007		2 783				
2008	2 337					

首先检验模式是否是平稳的，我们将表 3 -6 中自第 2 列起的每一个数分别除以同一个事故年的前一个数，得到表 3 -8。这个比值称为同一个事故年的相邻年进展因子。例如，在 2003 年发生的事故在进展年 1 ~2 的已发生累计损失的进展因子为 2，173/1，804 =1. 2045。进展因子计算结果如表 3 -8 所示。

表 3 -8　　累积发生损失的进展因子

事故年	进展因子				
	1 ~2	2 ~3	3 ~4	4 ~5	5 ~6
2003	1. 2045	1. 0925	1. 0177	1. 0000	1. 0000
2004	1. 2295	1. 0189	1. 0528	1. 0000	
2005	1. 1336	1. 0545	1. 0525		
2006	1. 1895	1. 0550			
2007	1. 1863				

我们发现，同一列的各个比值相差无几。可以认为模式是平稳的。至于严格的统计检验方法这里从略。精算师需要在对相邻年的进展因子取平均的基础上，同时综合各种可能的变化结果选定相邻年的进展因子，这个进展因子称为选定因子。对进展因子取平均可以是简单的算术平均，也可以以损失为权重的加权平均。为简化起见，我们取进展因子的算术平均，并将平均进展因子作为选定因子，我们可得表 3 -9。

表 3 -9　　选 定 因 子

	1 ~2	2 ~3	3 ~4	4 ~5	5 ~6
选定因子	1. 1887	1. 0552	1. 0410	1. 0000	1. 0000

例如，相邻年 2 – 3 的选定因子的值等于

$$1.0552=\frac{1.0925+1.0189+1.0545+1.0550}{4}$$

将相邻年的选定因子连乘，可以得到至最终年龄的进展因子，如表 3 – 10 所示。

表 3 – 10　　至最终年龄的进展因子

	1 ~ 6	2 ~ 6	3 ~ 6	4 ~ 6	5 ~ 6
进展因子	1.3057	1.0985	1.0410	1.0000	1.0000

例如，进展年 2—6 的进展因子的为 1.0985 = 1.0552 × 1.0410 × 1.0000 × 1.0000。

将表 3 – 6 由左下至右上最下面的对角线上的值分别乘以至最终年龄的进展因子，可得最终损失的预测值，如表 3 – 11 所示。

表 3 – 11　　最终损失预测值

事故年	进展年	相邻年选定因子	至最终年龄进展因子	12/31/2008 已发生损失	最终损失预测值
2003	6	—	1.0000	2 416	2 416
2004	5	1.0000	1.0000	2 552	2 552
2005	4	1.0000	1.0000	2 646	2 646
2006	3	1.0410	1.0410	2 722	2 834
2007	2	1.0552	1.0985	2 783	3 057
2008	1	1.1887	1.3057	2 337	3 051

关于索赔次数进展数据的流量三角形可类似地处理。

3.3.3　趋势的识别

表 3 – 11 中的最后一列，最终索赔额的预测值分别表示在 2003，2004，…，2008 年发生的损失。如果除以各年的已承担危险可以得到各事故年的索赔强度的预测值，类似地，也可以得到各事故年的索赔频率的预测值。如果这些预测值具有随时间（事故年）发展的趋势，那么根据此潜在的趋势可以预测未来事故年的损失。这有助于新费率厘定。

索赔强度的趋势变化显著影响费率厘定。一般来说，索赔强度会随时间而增加。通货膨胀、诉讼费的增加以及医疗费用的上涨等都是导致索赔额上升趋势产生的原因。同样索赔频率也会具有某种趋势，法庭判决、新

法规的实施等都会引起责任险索赔频率的增加。由于法律和社会的压力可能会减少酒后驾车的发生率，从而降低汽车保险的索赔频率。在劳工补偿保险中，一个政府法律的修订可能会同时造成索赔频率和索赔强度的变化。索赔频率和索赔强度的趋势常是分开分析的，但有时也可考察纯保费的变化趋势，即将索赔频率与索赔强度的影响结合起来考虑。

人们通常用一条合适的曲线拟合观察数据，从而反映趋势。什么是合适的？这个问题很重要。有的时候过分合适的曲线不一定好。考察如表 3－12 所示事故年索赔强度的预测数据。

表 3－12

事故年	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
预测的索赔强度（元）	309	532	763	996	1 225	1 444	1 647	1 828

非常理想，三次多项式 $y=-x^3+10x^2+200x+100$ 完全拟合上述数据，其中的 x 等于事故年减去 1994。图 3－5 用图形表示了拟合的结果。基于这种完美的拟合，有人可能会想用三次多项式预测未来的索赔强度的变化。用一个三次多项式去作为索赔强度趋势变化的模型真的非常合适吗？

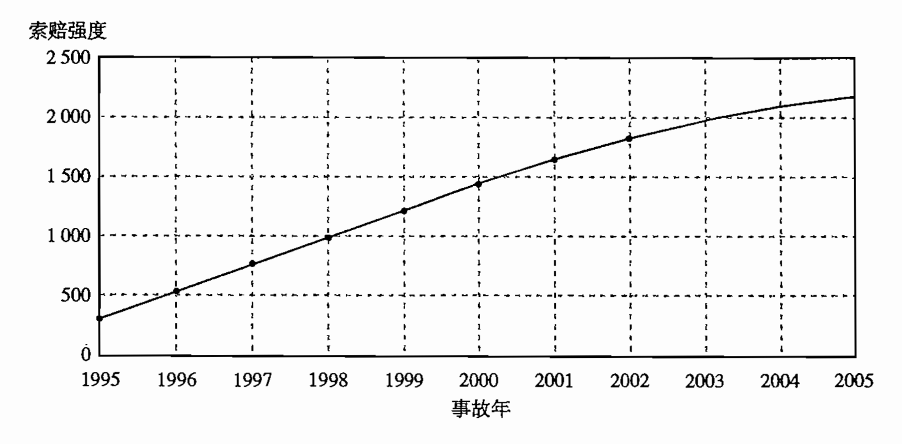


图 3－5

延长 x 轴，如图 3－6 所示，我们发现，尽管此三次多项式对观察数据拟合得非常好，但它并不是预测索赔强度趋势变化的合理的模型。

绝大多数的非寿险精算师在厘定费率过程中确定趋势变化模型时，常采用以下两种模型中的一种：

线性模型　　　　$y=ax+b$

指数模型　　　　$y=be^{ax}$

由于指数模型能表示成：

$$\ln(y)=ax+\ln(b)$$

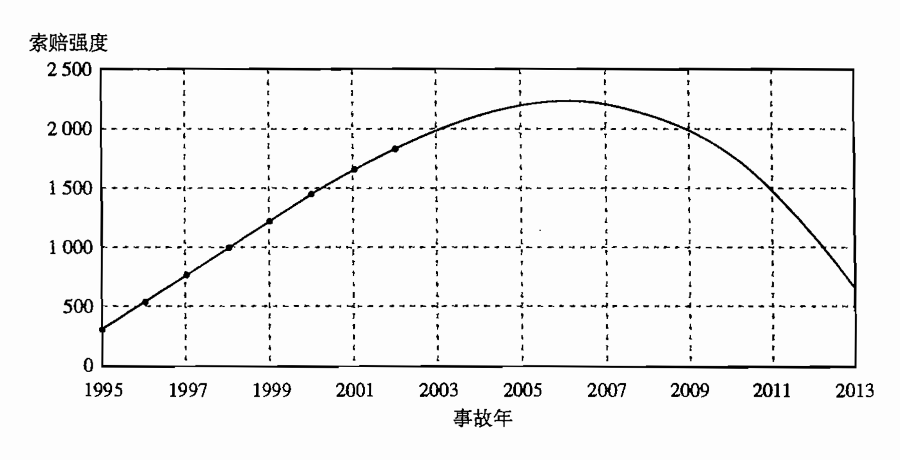


图 3－6

故作变换 $y' = \ln(y)$ 和 $b' = \ln(b)$。从而得：

$$y' = ax + b'$$

所以两个模型都能表示成线性函数的形式。它们都能够用标准的最小二乘回归方法，基于观察数据确定趋势模型。对线性模型来说，x 每增加一个单位，预测值 y 将增加一个常量 a。对指数模型来说，x 每增加一个单位，预测值 y 将增加一个常数 $e^a - 1$ 倍，预测值是它前面的一个预测值的 e^a 倍。

当观察到的趋势是下降时，使用线性模型将在未来的某些点上取到负值。由于索赔频率、索赔强度、纯保费和危险单位都是大于或等于零的，所以在此情况下，使用线性模型向外推一般是不合适的。

对于实际的问题来说，要做好对趋势的拟合并不容易，上面所述仅仅是一些简单的办法。有时需要与有经验的统计人员进行良好的合作。

§3.4 分类费率和冲销

在非寿险业务中，即使同一险种的业务也存在着千差万别的风险。因此，在为某个危险单位厘定费率时，我们必须考虑各种因素，甚至考虑该危险单位所在的区域位置。不同水平的因素和不同的地域位置，通常有不同的费率水平。这种情况称为费率分类，费率分类的原则是风险越大，费率越高。采用合理的分类费率能有效预防逆选择、体现保费的公平原则。如果某一家保险公司没有分类或者分类不当，那些优质的保单缴纳的保费就会远高于其损失成本，因此优质保单在这家公司缴纳的保费就会比进行合理分类的公司缴纳更多的保费。这样一来，势必会造成优质保单退出该家保险公司。运营一段时间后，留在该保险公司的业务将是那些风险程度较高的业务，这些业务缴纳的保费不足以支付相应的赔款和费用。长此以往，保险公司的偿付能力肯定会出现不足，甚至破产。因此，费率分类对

公司的经营起着至关重要的作用。

用于划分风险的变量称为“分类费率因子”。例如，在汽车保险中，保险公司通常取汽车所在的区域，被保险人的性别、年龄、驾龄和理赔经验等信息作为分类费率因子。分类费率因子又分为连续变量（如年龄）和离散变量（如性别）。根据分类费率因子的取值范围我们可以设定分类费率因子的等级数。对连续变量通常进行离散化处理，如将年龄划分为0—20、20—40、40及以上三个等级。这样，所有分类费率因子的各个等级把所有的保单分成若干个风险单元，在该风险分类系统下，每个风险单元内的保单被认为是同质的。例如，某险种有三个分类费率因子，第一个分类费率因子有20个等级，第二个分类费率因子有10个等级，第三个分类费率因子有5个等级，则该险种可以分成$20\times10\times5=1\ 000$个风险单元。我们用(i, j, k) $(i=1, \cdots, 20; j=1, \cdots, 10; k=1, \cdots, 5)$来表示第一个分类费率因子在$i$等级，第二个分类费率因子在$j$等级，第三个分类费率因子在$k$等级的风险单元。由于每个风险单元的保单是同质的，因此，应适用相同的费率。如果我们分别计算每个风险单元的费率，则上例中需要厘定1 000个不同的费率。为了简化分类费率的计算，一般选取某一个风险单元作为基准，称为基准单元，基准单元对应的各分类费率因子的等级称为基准等级，基准单元的费率称作基础费率，其他各个风险单元的费率与基础费率联系在一起。具体而言，就是确定每一分类费率因子中其他等级和对应的基础费率等级的相对关系。因此上例中我们只需要确定基础费率及$(20-1)+(10-1)+(5-1)=32$个相对值。

相对关系有相乘关系和相加关系。这两种确定相对关系的方法分别称为乘法模型和加法模型。为表述方便，我们假设某险种只有两个费率因子A、B，费率因子A有n个等级，费率因子B有m个等级，则该险种有$n\times m$个风险单元。我们不妨假设$(1, 1)$为基准单元，其费率为R_B。费率因子A中等级i和等级1的相对值为x_i $(i=1, 2\cdots, n)$，费率因子B中等级j和等级1的相对值为y_j $(j=1, 2\cdots, m)$。在乘法模型中，各风险单元和基准单元的相对数如表3-13所示。

表3-13　　　　乘　法　模　型

A / B	1	2	…	n
1	1	x_2	…	x_n
2	y_2	x_2y_2	…	x_ny_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	y_m	x_2y_m	…	x_ny_m

因此，在乘法模型下风险单元（i，j）的费率 $R_{ij}=R_B x_i y_j$。

在加法模型中，各风险单元和基准单元的相对数如表 3－14 所示。

表 3－14　　加法模型

B \ A	1	2	…	n
1	0	x_2	…	x_n
2	y_2	x_2+y_2	…	x_n+y_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	y_m	x_2+y_m	…	x_n+y_m

因此，在加法模型下风险单元（i，j）的费率 $R_{ij}=R_B+x_i+y_j$。

在分类费率厘定中，关键问题是确定基础费率和级别相对值。由于乘法模型和加法模型在估计级别相对值的基本原理是一致的，且在保险实务中，乘法模型的应用更为广泛，因此，我们仅讨论乘法模型。基础费率的确定方法和第二节的方法一致，我们这一节就不再赘述了。在这一节我们主要介绍如何确定级别相对数。我们采用单项分析法来确定级别相对数。单项分析法（one-way analysis）是每次只计算一个分类费率因子不同等级和基础等级的相对数。单项分析法简单直观，但是由于分析一个分类因子的相对数时，是固定其他分类因子来实现的，只有各分类因子相互独立，这种分析方法才比较可行。单项分析法确定级别相对数可以利用纯保费法计算，也可以利用损失率法计算。如果使用纯保费法，给定类别的纯保费除以基础类别的纯保费，就得到了给定类别关于基础类别的相对程度的度量。若采用损失率法，各级别的均衡已赚保费都调整到基础级别水平上，然后再分别计算经验损失率，各级别的经验损失率除以基础级别的经验损失率就得到相对数。也可以和损失率法相类似地，在有了新的经验数据后，对原有的相对程度的度量值进行改进，得到新的相对程度的度量值。纯保费法和损失率法并无本质的不同。

3.4.1　纯保费法确定级别相对数

若用纯保费法确定级别相对数是使用该级别的纯保费除以基础级别的纯保费。假设某险种有 A 和 B 两个费率分类因子，分类因子 A 有 n 个等级，分类因子 B 有 m 个等级。不妨假设风险单元（1，1）为基准单元。风险单元（i，j）的危险单位数和经过趋势化的预测损失分别记为 e_{ij}，l_{ij}。我们以分类因子 A 中等级 i 的级别相对数 x_i的确定为例来说明计算过程。等级 i 的纯保费 P_i等于该等级的经过趋势化的预测损失除以该等级的危险单位数，即

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} l_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} e_{ij}} \tag{3.4.1}$$

基础等级的纯保费 P_1 为：

$$P_1 = \frac{\sum_{j=1}^{m} l_{1j}}{\sum_{j=1}^{m} e_{1j}} \tag{3.4.2}$$

所以，等级 i 的级别相对数 x_i 有如下表达式：

$$x_i = \frac{P_i}{P_1} = \frac{\sum_{j=1}^{m} l_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} e_{ij}} \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{1j}}{\sum_{j=1}^{m} l_{1j}} \tag{3.4.3}$$

下面我们举一个纯保费法计算级别相对数的简单例子。

假设一组汽车保单根据车型和地区两个变量进行了分类，每个类别的危险单位数和赔付数据如表 3－15 所示。

表 3－15

	车型 1		车型 2	
	危险单位数	赔付率	危险单位数	赔付率
地区 1	5 000	30%	8 000	70%
地区 2	7 000	40%	6 000	60%

我们通过赔付率的加权平均数来计算各类别的赔付率。例如，车型 1 的赔付率为：

$$\frac{5\ 000 \times 30\% + 7\ 000 \times 40\%}{5\ 000 + 7\ 000} = 35.83\%$$

同理，可以得到其他类别的赔付率，如表 3－16 所示。

表 3－16

等　级	赔付率
车型 1	35.83%
车型 2	65.71%
地区 1	54.61%
地区 2	49.23%

假定车型 1 和地区 1 是基础类别，则车型 2 的相对数为 $\frac{65.71\%}{35.83\%}$ =

1.8339，地区 2 的相对数为 $\frac{49.23\%}{54.61\%}=0.9015$。车型 2 和地区 2 构成的风险单位的相对数为 $1.8339\times0.9015=1.6533$。因此，各级别的相对数如表 3－17所示。

表 3－17

	车型 1	车型 2
地区 1	1	1.8339
地区 2	0.9015	1.6533

3.4.2　损失率法计算新的级别相对数

确定了级别相对数后，随着数据的积累也要对级别相对数进行不断的调整更新，下面我们将介绍用损失率法计算新的级别相对数。在用经验数据确定新的级别相对数时，要用信度理论的知识，根据样本量判断是完全信度还是部分信度，我们这里假设是完全信度的情形。

假设某险种有 A 和 B 两个费率分类因子，分类因子 A 有 n 个等级，初始级别相对数分别为 x_1，…，x_n。分类因子 B 有 m 个等级，初始级别相对数分别为 y_1，…，y_m。不妨假设风险单元（1，1）为基准单元，则有 $x_1=1$，$y_1=1$。风险单元（i，j）的当前费率、危险单位数和经过趋势化的预测损失分别记为 R_{ij}，e_{ij}，l_{ij}。我们仍以分类因子 A 中等级 i 的新级别相对数 x_i^* 的确定为例来说明计算过程。

第 i 个等级基于当前费率的经验损失率 W_i 有如下表达式：

$$W_i=\frac{\sum_{j=1}^{m}l_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}e_{ij}R_{ij}} \tag{3.4.4}$$

基础等级基于当前费率的经验损失率 W_1 为：

$$W_1=\frac{\sum_{j=1}^{m}l_{1j}}{\sum_{j=1}^{m}e_{1j}R_{1j}} \tag{3.4.5}$$

等级 i 新的级别相对数 x_i^* 等于第 i 个等级的经验损失率与基础类别的经验损失率之比乘以当前相对数，即：

$$x_i^*=x_i\frac{W_i}{W_1}=x_i\frac{\sum_{j=1}^{m}l_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}e_{ij}R_{ij}}\frac{\sum_{j=1}^{m}e_{1j}R_{1j}}{\sum_{j=1}^{m}l_{1j}}=x_i\frac{\sum_{j=1}^{m}l_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}e_{ij}R_{11}x_iy_j}\frac{\sum_{j=1}^{m}e_{1j}R_{11}y_j}{\sum_{j=1}^{m}l_{1j}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{m} l_{ij} \sum_{j=1}^{m} e_{1j} y_j}{\sum_{j=1}^{m} l_{1j} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} y_j} \tag{3.4.6}$$

同理我们可以计算分类因子 B 下各等级新的级别相对数。在计算了新的级别相对数后，如果能再计算新的基础费率，那我们就能算得各风险单元的费率。在实践中，由于经营或者监管的原因，会要求新费率下总的承担保费比当前费率下的总的承担保费增加一个 α 的比例。这时该如何确定新的基础费率 R_{11}^*？新的基础费率 R_{11}^*是否等于当前的基础费率 R_{11}增加一个 α 的比例，$R_{11}^* = (1+\alpha)R_{11}$？我们在下面将说明，并不是简单的增加一个 α 的比例，还应该再乘上一个校正因子。

当前费率水平下总的已赚保费为：

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} R_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} R_{11} x_i y_j \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

在新费率下，同样危险水平总的已赚保费为：

$$\begin{aligned} P^* &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} R_{ij}^* \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} R_{11}^* x_i^* y_j^* \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

为了使新费率下总的已赚保费比原来增加一个 α 的比例，即 $P^* = (1+\alpha)P$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} R_{11}^* x_i^* y_j^* = (1+\alpha) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} R_{11} x_i y_j \tag{3.4.9}$$

即

$$R_{11}^* = (1+\alpha) R_{11} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} x_i y_j}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} x_i^* y_j^*} \tag{3.4.10}$$

上式说明基础费率并不是简单的增加一个 α 的比例，还应该再乘上一个校正因子

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} x_i y_j}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} x_i^* y_j^*} \tag{3.4.11}$$

新的基础费率为：

$$R_{11}^* = f(1+\alpha) R_{11} \tag{3.4.12}$$

这时，风险单元（i, j）的新的费率为：

$$R_{ij}^* = R_{11}^* x_i^* y_j^*$$

我们称 $\frac{1}{f}$ 为冲销因子，下面的例子将说明冲销因子产生的原因。

【例 3-3】 考虑下面三个费率类别的例子。已知的数据如表 3-18 所示。

表 3-18

类别	当前关于类别 1 的相对程度的度量	均衡已赚保费	经验损失（包括分摊损失调整费用）
1	1.0000	14 370 968	11 003 868
2	1.4500	9 438 017	6 541 840
3	1.8000	8 002 463	5 618 043
合计		31 811 448	23 163 751

并假设当前的基础费率 $R_1 = 160$，并要求新费率下总的已赚保费比当前费率下的总的已赚保费增加一个 $\alpha = 10.14\%$ 的比例。

我们先计算新的相对程度度量值，计算结果如表 3-19 所示。

表 3-19

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
类别	当前关于类别 1 的相对程度的度量	均衡已赚保费	基础费率水平的均衡已赚保费：(3)/(2)	经验损失（包括分摊损失调整费用）	损失率（包括分摊损失调整费用）：(5)/(4)	新的关于类别 1 的相对程度的度量
1	1.0000	14 370 968	14 370 968	11 003 868	0.7657	1.0000
2	1.4500	9 438 017	6 508 977	6 541 840	1.0050	1.3125
3	1.8000	8 002 463	4 445 813	5 618 043	1.2636	1.6503
合计		31 811 448	25 325 758	23 163 751		

表中各列计算的说明：

第一列（1）说明有三个类别，其中类别 1 为基础类别。

第二列（2）是当前的各个类别关于基础类别的相对程度的度量值。

第三列（3）是通过危险扩展法或平行四边形法估算出的经验期内的均衡已赚保费。

第四列（4）是各个类别的均衡已赚保费在基础费率水平下的值，它等于(3)/(2)。

第五列（5）是已知的各个类别的经验损失。

第六列（6）=（5）/（4），是各个类别的基础费率水平的经验损失率。

第七列（7）是各个类别关于基础类别新的相对程度的度量值，其计算方法如下：

类别 2 关于类别 1 新的相对数为 1.3125 = 1.0050/0.7657；

类别 3 关于类别 1 新的相对数为 1.6503 = 1.2636/0.7657。

下面我们计算若基础费率也只增加 10.14%，那么在新的级别相对数下总已赚保费为：

$$160\times1.1\times\frac{14\ 370\ 968}{160}+160\times1.1\times1.3125\times\frac{9\ 438\ 017}{160\times1.45}+160\times1.1\times1.6503\times\frac{8\ 002\ 463}{160\times1.8}=33\ 276\ 018$$

其中 160×1.1，$160\times1.1\times1.3125$ 和 $160\times1.1\times1.6503$ 分别为基础费率也只增加 10.14%下各级别的新费率，$\frac{14\ 370\ 968}{160}$、$\frac{9\ 438\ 017}{160\times1.45}$、$\frac{8\ 002\ 463}{160\times1.8}$ 分别为类别 1、2、3 的危险单位数。

则新的级别相对数下总已赚保费比当前已赚保费增加了 $\frac{33\ 276\ 018-31\ 811\ 448}{31\ 811\ 448}=4.6\%$，这与整体费率增长 10.14%存在偏差，这种偏差即为冲销（Off-balance）。冲销产生的原因是由于新的级别相对数会产生一个不同于在当前费率下得到的平均级别相对数。在本例中，级别 1 的相对数没有改变，而另两个级别相对数都有所下降。

对冲销的修正可在整体新费率的基础上除以一个冲销因子，即乘以 f。由式（3.4.11）可得，

$$f=\frac{14\ 370\ 968+9\ 438\ 017+8\ 002\ 463}{14\ 370\ 968+(1.3125/1.45)\times9\ 438\ 017+(1.6503/1.8)\times8\ 002\ 463}=1.0516$$

因此新的基础费率为：

$$1.0516\times1.1014\times160=185.31$$

其他各类新的费率为：

类别 2 新的费率：$1.3125\times185.31=243.22$；

类别 3 新的费率：$1.6503\times185.31=305.82$。

将新的级别费率乘以危险单位数再求和，得到新费率下的总的已赚保费为：

$$185.31\times\frac{14\ 370\ 968}{160}+243.22\times\frac{9\ 438\ 017}{160\times1.45}+305.82\times\frac{8\ 002\ 463}{160\times1.8}=35\ 036\ 349.93$$

较当前费率下的总已赚保费增长了 10.14%。因此，冲销修正后，级别费率的变动与整体费率的变动保持一致。

这里需要指出的是，就实际问题而言，究竟是采用基础费率的方法还是对各个类别单独厘定费率，有赖于问题的具体情况。这是因为基础费率方法简化了问题的统计模型。但我们在计算时往往是假设各费率分类因子之间是没有交互作用的。而这种假设并非总是符合实际情况的。因此，当我们不能肯定这种简化是否合适时，我们就应该先用统计检验方法对假设进行检验。

§3.5 费率厘定实例

在这一节我们将通过一个实例来说明费率厘定的一般步骤。

表 3－20 至表 3－25 是私人小汽车人身伤害险的费率厘订数据。

表 3－20 是当前费率表，7/1/2008 有效。该费率表中包括以三个级别和三个区域划分的基本限额费率，区域 2，级别 1 的费率为基础费率，等于 160 元。

表 3－21 是以危险单位扩展法计算均衡已赚保费的结果。经验期是 2005—2007 年，这三年中各级别与各区域的已承担危险量都已列出，乘以相应的当前费率就得到均衡已赚保费。

表 3－22 用已发生损失进展分析方法来预测发生年 2002—2007 年的最终损失与可分配损失调整费用。

表 3－23 用已报告索赔进展分析方法来预测发生年 2002—2007 年的最终索赔次数。

表 3－24 以发生年 2002—2007 年预测已发生损失与最终索赔次数为基础，计算索赔额趋势因子。假设趋势模型是线性模型 $y = ax + b$，其中 $x =$ 发生年 －2001，y 为平均索赔额。以最小二乘法拟合得到参数 $a = 150.77$，$b = 1\ 455.13$，并得到拟合值，算出趋势因子。

表 3－25 以已承担危险量和发生年 2002—2007 年的预测最终次数为基础，计算索赔频率趋势因子。假设趋势模型是指数模型 $y = ae^{bx}$，其中 $x =$ 发生年 －2001，y 为索赔频率。以最小二乘法拟合得到参数 $a = 0.065562$，$b = -0.013417$，并得到拟合值，算出趋势因子。

表 3－26 计算目标损失率（包含可分配损失调整费用）。注意这里未对利润和风险附加保费因子进行假设，而认为投资利润足以提供利润。

表 3－27 是以损失率法计算的整体指示费率变化量。

表 3－28 对发生年 2005—2007 年预测各发生年、级别与区域的趋势化最终损失与可分配损失调整费用。

表 3－29 计算级别与区域指示纯保费率及纯保费相对数。将相同年度各级别趋势化纯保费与级别 1 趋势化纯保费相除得到级别相对数；将各区域趋势化纯保费与区域 2 趋势化纯保费相除得到区域相对数。

表 3－30 计算级别相对数。在同一级别下以已承担危险量为权重计算级别相对数的加权平均作为级别相对数。

表 3－31 计算区域相对数。在同一区域下以已承担危险量为权重计算区域相对数的加权平均作为区域相对数。

表 3－32 对费率冲销进行修正。根据表 3－20 可以计算当前级别和区域相对数，进而计算冲销因子，进行冲销修正。

表 3－33 计算修正基本限额费率。

表 3－34 是 7/1/2009 生效的厘订费率表。

表 3－20　　私人小汽车人身伤害险（7/1/2008 费率表）　　（单位：元）

区域	级别 1	级别 2	级别 3
	家庭无年轻驾驶者	家庭有年轻驾驶者，但其不是主要驾驶者	年轻驾驶者为家庭主要驾驶者
1－中心城市	224	325	403
2－郊区	160	232	288
3－其他地区	136	197	245

表 3－21　　当前费率水平的已经保费　　（单位：元）

区域	级别 1	级别 2	级别 3	合计
已承担危险量				
2005 区域 1	7 807	3 877	1 553	13 237
区域 2	11 659	4 976	3 930	20 565
区域 3	5 760	2 639	3 030	11 429
合计	25 226	11 492	8 513	45 231
2006 区域 1	8 539	4 181	1 697	14 417
区域 2	12 957	5 442	4 262	22 661
区域 3	5 834	2 614	3 057	11 505
合计	27 330	12 237	9 016	48 583
2007 区域 1	9 366	4 551	1 870	15 787
区域 2	14 284	5 939	4 669	24 892
区域 3	5 961	2 591	3 036	11 588
合计	29 611	13 081	9 575	52 267
当前费率水平：（单位：元）				
区域 1	224	325	403	
区域 2	160	232	288	
区域 3	136	197	245	
均衡已赚保费：（单位：元）（已承担危险量×当前费率）				
2005 区域 1	1 748 768	1 260 025	625 859	3 634 652
区域 2	1 865 440	1 154 432	1 131 840	4 151 712
区域 3	783 360	519 883	742 350	2 045 593
合计	4 397 568	2 934 340	2 500 049	9 831 957
2006 区域 1	1 912 736	1 358 825	683 891	3 955 452
区域 2	2 073 120	1 262 544	1 227 456	4 563 120

续表

区域	级别 1	级别 2	级别 3	合计
区域 3	793 424	541 958	748 965	2 084 347
合计	4 779 280	3 163 327	2 660 312	10 602 919
2007 区域 1	2 097 984	1 479 075	753 610	4 330 669
区域 2	2 285 440	1 377 848	1 344 672	5 007 960
区域 3	810 696	510 427	743 820	2 064 943
合计	5 194 120	3 367 350	2 842 102	11 403 572

表 3-22　预测各发生年最终损失与可分配损失调整费用

累计已发生损失与可分配损失调整费用　（单位：元）

发生年	进展年 1	进展年 2	进展年 3	进展年 4	进展年 5	进展年 6
2002	2 116 135	3 128 695	3 543 445	3 707 375	3 854 220	3 928 805
2003	2 315 920	3 527 197	3 992 805	4 182 133	4 338 765	
2004	2 743 657	4 051 950	4 593 472	4 797 194		
2005	3 130 262	4 589 430	5 230 437			
2006	3 625 418	5 380 617				
2007	3 919 522					

损失进展因子

发生年	1~2	2~3	3~4	4~5	5~6	6~7+
2002	1.4785	1.1326	1.0463	1.0396	1.0194	
2003	1.5230	1.1320	1.0474	1.0375		
2004	1.4768	1.1336	1.0444			
2005	1.4661	1.1397				
2006	1.4841					
选定	1.4800	1.1350	1.0450	1.0385	1.0200	1.0000
最终	1.8594	1.2564	1.1069	1.0593	1.0200	1.0000

发生年	损失与可分配费用 12/31/2007	最终因子	预测最终损失与可分配费用
2002	3 928 805	1.0000	3 928 805
2003	4 338 765	1.0200	4 425 540
2004	4 797 194	1.0593	5 081 668
2005	5 230 437	1.1070	5 790 094
2006	5 380 617	1.2564	6 760 207
2007	3 919 522	1.8595	7 288 351

表 3－23　预测各发生年最终索赔次数

累计已报告索赔						
发生年	进展年 1	进展年 2	进展年 3	进展年 4	进展年 5	进展年 6
2002	1 804	2 173	2 374	2 416	2 416	2 416
2003	1 935	2 379	2 424	2 552	2 552	
2004	2 103	2 384	2 514	2 646		
2005	2 169	2 580	2 722			
2006	2 346	2 783				
2007	2 337					

索赔进展因子						
发生年	1～2	2～3	3～4	4～5	5～6	6～7＋
2002	1.2045	1.0925	1.0177	1.0000	1.0000	
2003	1.2295	1.0189	1.0528	1.0000		
2004	1.1336	1.0545	1.0525			
2005	1.1895	1.0550				
2006	1.1863					
选定	1.1900	1.0550	1.0450	1.0000	1.0000	1.0000
最终	1.3120	1.1025	1.0450	1.0000	1.0000	1.0000

发生年	已报告索赔 12/31/2007	最终因子	预测最终索赔
2002	2 416	1.0000	2 416
2003	2 552	1.0000	2 552
2004	2 646	1.0000	2 646
2005	2 722	1.0450	2 844
2006	2 783	1.1025	3 068
2007	2 337	1.3120	3 066

表 3－24　索赔额趋势因子

发生年	预测损失与可分配费用（表 3－22）	预测最终索赔次数（表 3－23）	预测最终平均索赔额	线性最小二乘法拟合值
2002	3 928 805	2 416	1 626	1 605.90
2003	4 425 540	2 552	1 734	1 756.67
2004	5 081 668	2 646	1 921	1 907.44
2005	5 790 094	2 834	2 036	2 058.21
2006	6 760 207	3 057	2 203	2 208.98
2007	7 288 351	3 052	2 377	2 359.75
索赔额年增长趋势因子（拟合值 2007/2006）				1.0683

表 3－25　　索赔频率趋势因子

发生年	预测最终索赔次数（表 3－23）	已承担危险量	预测最终索赔频率	指数最小二乘法拟合值
2002	2 416	37 846	0.0638	0.0647
2003	2 552	39 771	0.0642	0.0638
2004	2 646	42 135	0.0628	0.0630
2005	2 844	45 231	0.0629	0.0621
2006	3 068	48 583	0.0631	0.0613
2007	3 066	52 267	0.0587	0.0605
索赔频率年增长趋势因子（拟合值 2007/2006）				0.9869

表 3－26　　目标损失率（包含可分配损失调整费用）

项　目	百分比（%）
（1）佣金占保费百分比	15
（2）税收、执照费用占保费百分比	2.25
（3）其他承保费用占保费百分比	5.6
（4）一般管理费用占保费百分比	6.8
（5）与保费相关费用占保费百分比[（1）+（2）+（3）+（4）]	29.65
（6）不可分配费用占损失与可分配费用百分比	6.42
（7）目标损失率（包含可分配损失调整费用） [1－（5）]/[1＋（6）]（假设利润因子 Q 为零）	66.11

表 3－27　　整体费率变化量

				到 7/1/2009 的趋势因子	
（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）
发生年	预期损失与可分配费用（表 3－22）	经验期中点	到 7/1/2009 的年数	索赔额 $1.0683^{(4)}$（表 3－24）	索赔频率 $0.9869^{(4)}$（表 3－25）
2005	5 790 094	7/1/2005	4	1.3025	0.9486
2006	6 760 207	7/1/2006	3	1.2192	0.9612
2007	7 288 351	7/1/2007	2	1.1413	0.9740

续表

(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
发生年	趋势化损失与可分配费用 (2)×(5)×(6)	均衡已赚保费（表3-21）	趋势化均衡损失率（包括可分配费用）(8)/(9)	目标损失率（包括可分配费用）（表3-26）	整体指示费率变化量 (10)/(11)-1
2005	7 154 115	9 831 957	72.76%		
2006	7 922 357	10 602 919	74.72%		
2007	8 101 686	11 403 572	71.05%		
合计	23 178 158	31 838 448	72.80%	66.11%	10.12%

表 3-28　　趋势化最终损失与可分配费用

区域	级别	发生年	(1) 损失与可分配费用 12/31/2007	(2) 最终因子（表3-22）	(3) 到7/1/2009的索赔额趋势（表3-27）	(4) 到7/1/2009的索赔频率趋势（表3-27）	(5) 预测趋势化最终损失与可分配费用 (1)×(2)×(3)×(4)
1	1	2005	986 617	1.1070	1.3025	0.9486	1 349 451
		2006	982 778	1.2564	1.2192	0.9612	1 447 012
		2007	797 650	1.8595	1.1413	0.9740	1 648 798
	2	2005	680 769	1.1070	1.3025	0.9486	931 126
		2006	703 406	1.2564	1.2192	0.9612	1 035 673
		2007	456 899	1.8595	1.1413	0.9740	944 442
	3	2005	325 397	1.1070	1.3025	0.9486	445 064
		2006	343 738	1.2564	1.2192	0.9612	506 109
		2007	252 790	1.8595	1.1413	0.9740	522 534
2	1	2005	1 062 395	1.1070	1.3025	0.9486	1 453 097
		2006	1 170 978	1.2564	1.2192	0.9612	1 724 112
		2007	848 551	1.8595	1.1413	0.9740	1 754 013
	2	2005	597 044	1.1070	1.3025	0.9486	816 610
		2006	575 004	1.2564	1.2192	0.9612	846 618
		2007	449 123	1.8595	1.1413	0.9740	928 368
	3	2005	557 332	1.1070	1.3025	0.9486	762 294
		2006	650 645	1.2564	1.2192	0.9612	957 989
		2007	469 963	1.8595	1.1413	0.9740	971 446
3	1	2005	401 622	1.1070	1.3025	0.9486	549 321
		2006	394 358	1.2564	1.2192	0.9612	580 640
		2007	243 943	1.8595	1.1413	0.9740	504 247
	2	2005	252 439	1.1070	1.3025	0.9486	345 275
		2006	228 313	1.2564	1.2192	0.9612	336 161
		2007	174 954	1.8595	1.1413	0.9740	361 642
	3	2005	336 822	1.1070	1.3025	0.9486	460 690
		2006	331 397	1.2564	1.2192	0.9612	487 939
		2007	225 349	1.8595	1.1413	0.9740	465 812

表 3-29　　　　　　　　　　趋势化纯保费

区域	级别	发生年	(1) 预测趋势化损失与可分配费用（表 3-28）	(2) 已承担危险量（表 3-21）	(3) 趋势化纯保费 (1) / (2)	(4) 对级别 1 的相对数	(5) 对区域 2 的相对数
1	1	2005	1 349 451	7 807	172.85	1.0000	1.3869
		2006	1 447 012	8 539	169.46	1.0000	1.2735
		2007	1 648 798	9 366	176.04	1.0000	1.4336
	2	2005	931 126	3 877	240.17	1.3894	1.4635
		2006	1 035 673	4 181	247.71	1.4618	1.5923
		2007	944 442	4 551	207.52	1.1788	1.3276
	3	2005	445 064	1 553	286.58	1.6580	1.4775
		2006	506 109	1 697	298.24	1.7599	1.3268
		2007	522 534	1 870	279.43	1.5873	1.3430
2	1	2005	1 453 097	11 659	124.63	1.0000	1.0000
		2006	1 724 112	12 957	133.06	1.0000	1.0000
		2007	1 754 013	14 284	122.80	1.0000	1.0000
	2	2005	816 610	4 976	164.11	1.3167	1.0000
		2006	846 618	5 442	155.57	1.1691	1.0000
		2007	928 368	5 939	156.32	1.2730	1.0000
	3	2005	762 294	3 930	193.97	1.5563	1.0000
		2006	957 989	4 262	224.77	1.6892	1.0000
		2007	971 446	4 669	208.06	1.6944	1.0000
3	1	2005	549 321	5 760	95.37	1.0000	0.7652
		2006	580 640	5 834	99.53	1.0000	0.7480
		2007	504 247	5 961	84.59	1.0000	0.6889
	2	2005	345 275	2 639	130.84	1.3719	0.7972
		2006	336 161	2 614	128.60	1.2921	0.8266
		2007	361 642	2 591	139.58	1.6500	0.8929
	3	2005	460 690	3 030	152.04	1.5943	0.7839
		2006	487 939	3 057	159.61	1.6037	0.7101
		2007	465 812	3 036	153.43	1.8138	0.7374

表 3-30　　对级别 1 的相对数

级别	区域	发生年	(1) 已承担危险量（表 3-29）	(2) 对级别 1 的相对数（表 3-29）	(3) 加权相对数 (1) × (2)
2	1	2005	3 877	1.3894	5 386.70
		2006	4 181	1.4618	6 111.79
		2007	4 551	1.1788	5 364.72
	2	2005	4 976	1.3167	6 551.90
		2006	5 442	1.1691	6 362.24
		2007	5 939	1.2730	7 560.35
	3	2005	2 639	1.3719	3 620.44
		2006	2 614	1.2921	3 377.55
		2007	2 591	1.6500	4 275.15
合计			36 810	—	48 610.84
级别 2 相对数				48 610.84/36 810 = 1.3206	
级别	区域	发生年	(1) 已承担危险量（表 3-29）	(2) 对级别 1 的相对数（表 3-29）	(3) 加权相对数 (1) × (2)
3	1	2005	1 553	1.6580	2 574.87
		2006	1 697	1.7599	2 986.55
		2007	1 870	1.5873	2 968.25
	2	2005	3 930	1.5563	6 116.26
		2006	4 262	1.6892	7 199.37
		2007	4 669	1.6944	7 911.15
	3	2005	3 030	1.5943	4 830.73
		2006	3 057	1.6037	4 902.51
		2007	3 036	1.8138	5 506.70
合计			27 104	—	44 996.40
级别 3 相对数				44 996.40/27 104 = 1.6601	

表 3－31　　对区域 2 的相对数

区域	级别	发生年	(1) 已承担危险量 (表 3－29)	(2) 对区域 2 的相对数 (表 3－29)	(3) 加权相对数 (1) × (2)
1	1	2005	7 807	1.3869	10 827.53
		2006	8 539	1.2735	10 874.42
		2007	9 366	1.4336	13 427.10
	2	2005	3 877	1.4635	5 673.99
		2006	4 181	1.5923	6 657.41
		2007	4 551	1.3276	6 041.91
	3	2005	1 553	1.4775	2 294.56
		2006	1 697	1.3268	2 251.58
		2007	1 870	1.3430	2 511.41
合计			43 441	—	60 559.89
区域 1 相对数				60 559.89/43 441 = 1.3941	
区域	级别	发生年	(1) 已承担危险量 (表 3－29)	(2) 对区域 2 的相对数 (表 3－29)	(3) 加权相对数 (1) × (2)
3	1	2005	5 760	0.7652	4 407.55
		2006	5 834	0.7480	4 363.83
		2007	5 961	0.6889	4 106.53
	2	2005	2 639	0.7972	2 103.81
		2006	2 614	0.8266	2 160.73
		2007	2 591	0.8929	2 313.50
	3	2005	3 030	0.7839	2 375.22
		2006	3 057	0.7101	2 170.78
		2007	3 036	0.7374	2 238.75
合计			34 522	—	26 240.70
区域 3 相对数				26 240.70/34 522 = 0.7601	

表 3－32　　对冲销进行的费率修正

区域	级别	发生年	(1) 已承担危险量	(2) 当前级别和区域相对数	(3) 对区域 2 相对数	(4) 对级别 1 相对数	(5) (1)×(2)	(6) (1)×(3)×(4)
1	1	2007	9 366	1.40	1.3941	1.0000	13 112.4	13 057.14
	2		4 551	2.03	1.3941	1.3206	9 238.53	8 378.612
	3		1 870	2.52	1.3941	1.6601	4 712.4	4 327.826
2	1		14 284	1.00	1.0000	1.0000	14 284	14 284
	2		5 939	1.45	1.0000	1.3206	8 611.55	7 843.043
	3		4 669	1.80	1.0000	1.6601	8 404.2	7 751.007
3	1		5 961	0.85	0.7601	1.0000	5 066.85	4 530.956
	2		2 591	1.23	0.7601	1.3206	3 186.93	2 600.815
	3		3 036	1.53	0.7601	1.6601	4 645.08	3 830.952
合计							71 261.94	66 604.35

冲销因子	66 604.35/71 261.94 =0.9346
整体指示费率变化量（表 3－27）	10.12%
级别 1 区域 2 当前费率	160
级别 1 区域 2 指示费率	160×（1＋10.12%）×71 261.94/66 604.35 ＝188

表 3－33　　各级别与区域的基本限额费率

区域	级别	(1) 级别相对数（表 3－30）	(2) 区域相对数（表 3－31）	(3) 基础费率（表 3－32）	(4) 各级别区域费率 (1)×(2)×(3)
1	1	1.0000	1.3941	188	262
	2	1.3206	1.3941	188	346
	3	1.6601	1.3941	188	435
2	1	1.0000	1.0000	188	188
	2	1.3206	1.0000	188	248
	3	1.6601	1.0000	188	312
3	1	1.0000	0.7601	188	143
	2	1.3206	0.7601	188	189
	3	1.6601	0.7601	188	237

表 3-34　　　　7/1/2009 费率表

区域	级别 1	级别 2	级别 3
	家庭无年轻驾驶者	家庭有年轻驾驶者，但其不是主要驾驶者	年轻驾驶者为家庭主要驾驶者
1-中心城市	262	346	435
2-郊区	188	248	312
3-其他地区	143	189	237

§3.6　效用理论与非寿险费率厘定

在这一节，我们将从效用理论出发探究保险合理定价问题。为此，我们将分别从投保人和保险人的价值结构来看保险定价的“合理性”。

3.6.1　效用函数的选取

由于投保人受个人性格，知识层次，所处环境等诸因素的影响，不同的投保人对同一决策问题的反映不一定相同，所以不同投保人的效用函数一般是不一样的。即使是同一个投保人，由于时间、环境等条件的变化，对相同的机会也可能做出不同的决定。根据投保人对风险的态度的不同，可以将效用函数分为三类：

1. 直线型效用函数。

$$u(w) = aw + b, a > 0$$

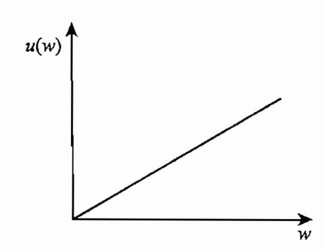


图 3-7　直线型效用函数

直线型效用函数，货币与其效用成线性关系，即对任意 α $(0<\alpha<1)$ 及任意两个货币值 w_1、w_2，有

$$u(\alpha w_1 + (1-\alpha)w_2) = \alpha u(w_1) + (1-\alpha)u(w_2)$$

使用直线型效用函数的投保人，就是用货币期望值准则作为决策的依据，它和依据最大期望效用原理作出的决策结果是一样的。因此这类投保人也称为风险中立性投保人。这类投保人的边际效用（效用函数的导数）恒为常数。通常，投保人对风险的中立性，仅在一定的金额 r 范围内才成

立。风险中立者在特定的金额损失范围内并不购买保险，而仅对巨额损失的风险才改变其决策态度。

2. 上凸型效用函数。

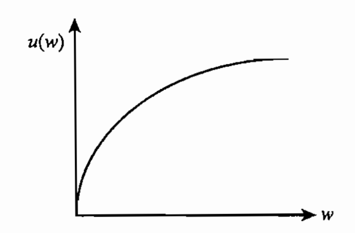


图 3－8　上凸型效用函数

从图 3－8 我们可以看出这类效用函数有如下性质：

（1）效用函数是递增的，即一阶导数 $u'(w)>0$。

（2）效用函数是上凸的，即二阶导数 $u''(w)<0$。

（3）对任意 $\alpha(0<\alpha<1)$ 及任意两个货币值 w_1、w_2，有

$$u[\alpha w_1+(1-\alpha)w_2]>\alpha u(w_1)+(1-\alpha)u(w_2)$$ 。

（4）（Jensen 不等式）$Eu(X)<u(EX)$。

性质(1),(2),(3)可由上凸函数的性质直接得到。下面证明（4）。

证（4）：设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，L 为其取值范围，

记 $\mu=EX$，则 $Eu(X)=\int_L u(x)f(x)dx$，又由泰勒公式得，对 $\forall x\in L$

$$u(x)=u(\mu)+u'(\mu)(x-\mu)+\frac{1}{2}u''(\mu)(x-\mu)^2+o[(x-\mu)^2]$$

因为，$u''(x)<0$

所以，$u(x)<u(\mu)+u'(\mu)(x-\mu)+o[(x-\mu)^2]$

两边积分并略去无穷小项，

所以，$\int_L u(x)f(x)dx<u(\mu)+u'(\mu)\int_L(x-\mu)f(x)dx=u(\mu)$

所以，$E[u(x)]<u(EX)$

如果投保人的效用函数是上凸型的，那么投保人愿意支付大于期望损失金额的保险费，以求转移风险。因此这类人对待风险的态度是属于厌恶型的。贝努里的效用原理告诉我们风险厌恶型的效用函数是最为普遍的。常见的风险厌恶型效用函数有：

（1）指数效用函数 $u(w)=-e^{-\alpha w}$，$\alpha>0$。

（2）对数型效用函数 $u(w)=\ln w$，$w>0$。

（3）平方根效用函数 $u(w)=\sqrt{w}$，$w>0$。

（4）平方效用函数 $u(w)=w-\alpha w^2,w<\frac{1}{2\alpha}$，$\alpha>0$。

（5） 幂效用函数：$u(w) = w^{\alpha}$，$\alpha < 1$。

3. 下凸型效用函数，如图3－9所示。

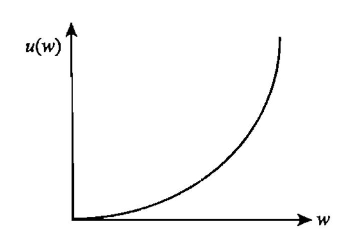


图3－9　下凸型效用函数

这类效用函数有如下性质：

（1） 效用函数是递增的，即一阶导数 $u'(w) > 0$。

（2） 效用函数是下凸的，即二阶导数 $u''(w) > 0$。

（3） 对任意 α （$0 < \alpha < 1$） 及任意两个货币值 w_1，w_2，有

$$u[\alpha w_1 + (1-\alpha)w_2] < \alpha u(w_1) + (1-\alpha)u(w_2)。$$

（4） （Jensen 不等式） $Eu(X) > u(EX)$。

如果投保人的效用函数是下凸型的，那他愿意支付的保险费低于期望损失金额，因此这种类型的投保人富有冒险精神，对风险是否发生持乐观态度，也就是说此类投保人属于风险爱好型的。

综上所述，投保人对待风险事件的态度一般可分为上述三种类型：风险厌恶型、风险中立型和风险爱好型。然而，在实际中，很多投保人对待同一风险事件的态度是随着货币的值的不同而表现出不同的类型。例如，投保人在其既定目标达到前，往往表现得颇具冒险性，以求目标尽快达到。这一阶段，他是风险爱好型。但当他达到目标后，他往往会趋于保守，而成为一个风险厌恶者。又如，投保人对于较小范围或其财力所能承受的范围之内的损失，往往表现出风险爱好型的态度，而对于巨额损失则变成了风险厌恶者。因此在效用函数上往往存在一个爱好风险的区域，如图3－10所示。

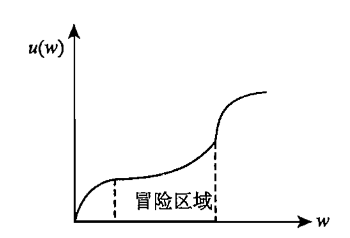


图3－10　在不同区间上的风险态度

投保人的风险态度可以用效用函数的凸性来区别，为了进一步衡量风险态度或是比较不同投保人之间风险态度的差异，可以进一步用效用曲线

的凸性程度来定量地刻画风险态度。Pratt（1964）和 Arrow（1965，1974）提出了两种度量效用函数所反映的投保人的风险态度的指标，称为绝对风险指数和相对风险指数，统称 Arrow—Pratt 指数。

定义 3－1 设投保人的效用函数为 $u(x)$，则称 $R_a(x)=-u''(x)/u'(x)$ 和 $R_r(x)=-xu''(x)/u'(x)$ 分别为投保人的绝对风险指数和相对风险指数。

Arrow—Pratt 指数不仅可以用于衡量投保人的风险态度的相对程度，也可以用来比较两个投保人之间风险态度的差异。

定义 3－2 设投保人 A 和投保人 B 的效用函数分别为 $u_A(x)$ 和 $u_B(x)$，相应的绝对风险指数分别为 $R_{aA}(x)$ 和 $R_{aB}(x)$，若对任意 x，都有 $R_{aA}(x)\geqslant R_{aB}(x)$，且至少存在 x_0，使 $R_{aA}(x_0)>R_{aB}(x_0)$，则称 A 比 B 更厌恶风险。

风险态度与 Arrow—Pratt 指数之间存在如下关系，如表 3－35 所示。

表 3－35

风险态度	效用曲线的凸性	绝对风险指数
风险厌恶	上凸（$u''(x)<0$）	$R_a(x)>0$
风险中立	直线（$u''(x)=0$）	$R_a(x)=0$
风险爱好	下凸（$u''(x)>0$）	$R_a(x)<0$

3.6.2 非寿险的效用定价理论

我们先从投保人角度来考虑，假定他的效用函数为 $u(w)$，其拥有价值为 w_0的财产，这笔财产面临着某种潜在损失，这一风险被表示为随机变量 X，（$0\leqslant X\leqslant w_0$），随机变量的分布函数为 $F(x)$，现在的问题是投保人应付多少保险费 G（足额）投保这笔财产？根据效用原理，保险费 G 对投保人来说是越少越好，投保人所愿意付出的最高保费（临界值）是当“投保的效用”等于“不投保的效用”时所对应的解。即最高保费 G 是方程的解。

$$u(w_0-G)=E[u(w_0-X)] \tag{3.6.1}$$

因为投保人决定投保，则无论损失是否发生，投保人仅损失所付出的保费 G。他拥有确定的拥有财产（w_0-G），其效用函数为 $u(w_0-G)$，若投保人决定不投保，则其财产实际上是随机变量（w_0-X），效用也是随机变量 $u(w_0-X)$，我们用这个随机变量的期望值 $Eu(w_0-X)$ 来表示不投保的平均效用，则对投保人来说，保费 G 应满足：

$$u(w_0-G)\geqslant E[u(w_0-X)] \tag{3.6.2}$$

随着 G 增大，（w_0-G）逐渐减小，投保人的效用 $u(w_0-G)$ 也就越小，当 G 高到使等号成立时，投保与不投保效用一样，即投保与否对投保人已经无所谓了。因此等号成立时对应的 G 是投保人愿付的最高保费。

【例3－4】　设投保人的效用函数是指数效用函数 $u(w)=-e^{-\alpha w}(\alpha>0)$，其初始财产为 w_0，财产损失随机变量 X 服从 $[0,100]$ 上的均匀分布，求投保人愿付的最高保费 G?

解： 投保人愿付的最高保费 G 满足（3.6.1）式，即

$$u(w_0-G)=E[u(w_0-X)]$$

将 $u(w)=-e^{-\alpha w}$ 代入得

$$-e^{-\alpha(w_0-G)}=E[-e^{-\alpha(w_0-X)}]$$

$$e^{\alpha G}=Ee^{\alpha X}$$

$$=\int_0^{100}e^{\alpha x}\frac{1}{100}dx$$

$$=\frac{e^{100\alpha}-1}{100\alpha}$$

所以，$G=\dfrac{\ln(e^{100\alpha}-1)-\ln(100\alpha)}{\alpha}$

即 G 与初始财产 w_0 无关。

【例3－5】　设投保人的效用函数为 $u(w)=k\ln w(w>1)$，初始财产为 w_0，财产所面临的损失随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布。试证明投保人愿意付出的最大保费为 $G=w_0-\dfrac{w_0^{w_0}}{e(w_0-1)^{w_0-1}}$。

证： $u(w_0-G)=E[u(w_0-X)]$

$$k\ln(w_0-G)=E[k\ln(w_0-X)]$$

$$\ln(w_0-G)=\int_0^1\ln(w_0-X)dx$$

令 $\ln(w_0-X)=y$，则

$$\text{上式}=\int_{\ln w_0}^{\ln(w_0-1)}-ye^y dy$$

$$=ye^y\Big|_{\ln(w_0-1)}^{\ln w_0}-\int_{\ln(w_0-1)}^{\ln w_0}e^y dy$$

$$=(\ln w_0)w_0-[\ln(w_0-1)](w_0-1)-1$$

$$w_0-G=e^{(\ln w_0)w_0-[\ln(w_0-1)](w_0-1)-1}=\frac{w_0^{w_0}}{e(w_0-1)^{w_0-1}}$$

所以，$G=w_0-\dfrac{w_0^{w_0}}{e(w_0-1)^{w_0-1}}$

我们再从保险人的角度来考虑，设保险人的效用函数为 $u_1(x)$，其当前财富为 w_1。若要承保，则可以在保险人当前财富的基础上增加一笔保费收入，记为 H，但必须承担风险，其财富变成了随机变量 w_1+H-X；如果不承担风险，其财富恒为 w_1。那么保险人应该收取多少保费去承保投保人的风险呢？当然，保费 H 对保险人来说是越高越好，因此保险人愿意接受的

最低承保保费 H 应满足方程：

$$Eu_1(w_1+H-X)=u(w_1) \tag{3.6.3}$$

保险人承保后的平均效用应该不小于不承保的效用，即 $Eu_1(w_1+H-X)\geqslant u(w_1)$

而随着 H 的减少，$Eu_1(w_1+H-X)$ 也相应减少，当 H 小到使等号成立时，承保已无任何吸引力，所以保险人愿意接受的最低保费 H 是使等号成立时的值。

【例 3-6】 设保险人当前财富为 w_1，效用函数为指数效用函数 $u_1(w)=-e^{-\alpha_1 w}(\alpha_1>0)$，损失随机变量 X 服从 [0，100] 的均匀分布。求保险人承保需收取的最低保费 H。

解： 保险人同意承保需收取的最低保费 H 应满足式（3.6.3）

$$Eu_1(w_1+H-X)=u(w_1)$$

将 $u_1(w)=-e^{-\alpha_1 w}$ 代入得

$$E[-e^{-\alpha_1(w_1+H-X)}]=-e^{-\alpha_1 w_1}$$

$$e^{\alpha_1 H}=Ee^{\alpha_1 X}$$

$$=\int_0^{100}e^{\alpha_1 x}\frac{1}{100}dx$$

$$=\frac{e^{100\alpha_1}-1}{100\alpha_1}$$

所以，$H=\dfrac{\ln(e^{100\alpha_1}-1)-\ln(100\alpha_1)}{\alpha_1}$

同样保费 H 与初始财富无关。

从上述分析可以看出只有投保人愿付的保费 G 大于保险人愿意接受的最低保费 H 时，一份保险合同才能在介于 H 到 G 之间的价格成立。同时由上一节分析可知，只有当投保人是属于风险厌恶型的投保人的时候，才能成立保险合同，此时有 $G>EX$。

所以一份保险合同成立的条件是 $G\geqslant H>EX$。

接下来我们来解决例 3-4 中的问题。

【例 3-7】 假设某企业拥有价值500万的厂房，厂房发生火灾的概率是2‰（假设火灾发生厂房就全部烧毁），并假设企业的效用函数为 $u(w)=\sqrt{w}$，保险人的初始财富为 5 亿元，其效用函数为 $u(w)=w-\dfrac{w^2}{2c},w\in[0,c]$，取 $c=500$ 万元。问企业是否会投保？如投保，那么合理的保费范围是什么？

解： 由题可知投保人的初始财富为 500 万元。损失随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}500\text{万} & 0\\ 0.002 & 0.998\end{pmatrix}$（以下我们都以万为单位），所以由式（3.6.1）得

$$u(w_0-G)=E[u(w_0-X)]$$

$$\sqrt{500-G}=E\sqrt{500-X}$$
$$=\sqrt{500-500}\times 0.002+\sqrt{500-0}\times 0.998$$
$$=\sqrt{500}\times 0.998$$

所以，$G=500-500\times 0.998^2=1.998$（万元）

保险人愿意接受的最低保费 H 满足（3.6.3）式，即

$$Eu_1(w_1+H-X)=u(w_1)$$
$$E\left[(w_1+H-X)-\frac{(w_1+H-X)^2}{2c}\right]=w_1-\frac{w_1^{\ 2}}{2c}$$
$$H-EX-\frac{H^2+EX^2-2w_1\cdot EX-2H\cdot EX+2w_1H}{2c}=0$$

将 $EX=500\times 0.002+0\times 0.998=1$，$EX^2=500^2\times 0.002+0\times 0.998=500$，$w_1=50\ 000$，$c=500$ 代入上式得，

$$H-1-\frac{H^2+500-100\ 000-2H+100\ 000H}{1\ 000}=0$$
$$H^2+98\ 998H-98\ 500=0$$

得 $H=\dfrac{-98\ 998\pm\sqrt{98\ 998^2+4\times 98\ 500}}{2}=0.99496$（万元）

因为 $G>H$，所以企业会投保，且合理的保费在 9 949.6 元到 19 980 元之间。所以在实务中，许多保险价格是可以商量的。

3.6.3　最优保险问题

在上一小节我们讨论投保人和保险人的临界保费，总是假设保险人足额承保投保人的损失。但在实务中，极少有足额承保的情况，足额承保不利于鼓励投保人采取自我防灾防损的措施。因此，保险合同规定的赔付额，通常低于实际损失。在这一节里我们将讨论不完全保险的定价及最优保险问题。

由于赔付额视损失而定，是损失 x 的函数，记作 $I(x)$ $(0\leqslant I(x)\leqslant x)$，此时投保人愿意支付的最高保费 G 满足方程

$$Eu[w_0-X-G+I(X)]=E[u(w_0-X)] \tag{3.6.4}$$

其中 w_0为投保人的初始财富，X 为损失随机变量。

保险人愿意承保所收取的最低保费 H 满足方程

$$Eu_1[w_1+H-I(X)]=u(w_1) \tag{3.6.5}$$

其中 w_1为保险人初始财富。

【例 3－8】 如果保险合同承诺赔偿损失的一半，即 $I(X)=\frac{1}{2}X$，试重新计算例 3－7。

解： 投保人愿意支付的最高保费 G 满足（3.6.4）式，即

$$Eu[w_0 - X - G + I(X)] = E[u(w_0 - X)]$$

$$E\sqrt{500 - X - G + I(X)} = E\sqrt{500 - X}$$

$$E\sqrt{500 - X - G + \frac{1}{2}X} = E\sqrt{500 - X}$$

$$\sqrt{500 - G - \frac{1}{2} \times 500} \times 0.002 + \sqrt{500 - G - \frac{1}{2} \times 0} \times 0.998$$

$$= \sqrt{500 - 500} \times 0.002 + \sqrt{500 - 0} \times 0.998$$

$$\sqrt{250 - G} \times 0.002 + \sqrt{500 - G} \times 0.998 = \sqrt{500} \times 0.998$$

得 $G = 1.41204$ （万元）

保险人愿意接受的最低保费 H 满足（3.6.5）式，即

$$Eu_1[w_1 + H - I(X)] = u(w_1)$$

$$E[(w_1 + H - I(X)) - \frac{(w_1 + H - I(X))^2}{2c}] = w_1 - \frac{w_1^{\ 2}}{2c}$$

$$H - EI(X) - \frac{H^2 + EI(X)^2 - 2w_1 \cdot EI(X) - 2H \cdot EI(X) + 2w_1 H}{2c} = 0$$

将 $I(X) = \frac{X}{2}$，$EX = 1$，$EX^2 = 500$，$w_1 = 50\ 000$，$c = 500$ 代入上式得

$$H^2 + 98\ 999H - 49\ 375 = 0$$

得 $H = 0.49874$ （万元）

因为 $G > H$，所以保单能够成立，且保费在 4 987.4 元到 14 120.4 元之间保险双方都能接受。

【例 3－9】 设保险人的初始财富为 w_1，其效用函数为指数效用函数 $u(w) = -e^{-\alpha w}(\alpha > 0)$，某财产保险业务，财产损失随机变量 X 服从 $[0, 300]$ 的均匀分布。且保险人只负责赔偿超过 100 的部分，即

$$I(X) = \begin{cases} 0, & X \leqslant 100 \\ X - 100, & 100 < X \leqslant 300 \end{cases}$$，试计算最低保费 H。

解： 保险人愿意接受的最低保费 H 满足（3.6.5）式，即

$$Eu_1[w_1 + H - I(X)] = u(w_1)$$

将 $u(w) = -e^{-\alpha w}$ 代入得

$$E(-e^{-\alpha[w_1 + H - I(X)]}) = -e^{\alpha w_1}$$

$$e^{\alpha H} = E(e^{\alpha I(X)})$$

$$= \int_{100}^{300} e^{\alpha(x-100)} \frac{1}{300} dx$$

$$= \frac{e^{300\alpha} - e^{100\alpha}}{300\alpha e^{100\alpha}}$$

所以，$H = \dfrac{\ln(e^{300\alpha} - e^{100\alpha}) - \ln(300\alpha) - 100\alpha}{\alpha}$

定义 3－3　称赔款额 $Id(X)=\begin{cases}0, & X\leq d\\ X-d, & X>d\end{cases}$ 的保险为超赔损失（再）保险，其中 d 为免赔额（在再保险中 d 为原保险人的自留额）。

超赔损失保险，理赔只有在损失超过 d 时才发生，而且只支付超过 d 部分的损失。

设损失随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$，理赔为超赔损失模型，并设保费 P 为理赔期望值，即 $P=EI_d(X)$，则

$$P=EI_d(X)=\int_0^{+\infty}I_d(X)f(x)dx=\int_d^{+\infty}(x-d)f(x)dx=\int_d^{+\infty}[1-F(x)]dx$$

下面我们来证 $\int_d^{+\infty}(x-d)f(x)dx=\int_d^{+\infty}[1-F(x)]dx$。

$$\int_d^{+\infty}(x-d)f(x)dx=-\int_d^{+\infty}(x-d)d[1-F(x)]$$

$$=-(x-d)[1-F(x)]\Big|_d^{\infty}+\int_d^{\infty}[1-F(x)]dx$$

又因为，$(x-d)[1-F(x)]\leq\int_x^{\infty}ydF(y)\xrightarrow{x\to\infty}0$

所以，$\int_d^{+\infty}(x-d)f(x)dx=\int_d^{+\infty}[1-F(x)]dx$

在给定投保人愿支付保费 P（等于理赔函数 $I(X)$ 的期望，即 $P=EI(X)$）之后，最优保险是理赔为超赔损失的形式，即 $I(X)=I_d(X)$ 为最优保险。

定理 3－4　设投保人拥有财产 w_0，财产损失随机变量为 X，投保人是厌恶风险型的，其效用函数 $u(x)$ 满足 $u'(x)>0, u''(x)<0$。再假定保险市场能以理赔的期望值为价格提供保单。若该投保人愿付出的保费为 P，市场上就能提供各种理赔形式为 $I(X)$ 的保单，只要满足 $EI(X)=P$，则对投保人来说最优的保险是具有免赔额 d^* 的超赔损失保险 $I_{d^*}(X)$，并且最优免赔额 d^* 是下面关于 d 的方程 $P=\int_d^{+\infty}(x-d)f(x)dx$ 的解。

证：要证对满足 $EI(X)=P$ 的理赔形式 $I(X)$ 中 $I_{d^*}(X)$ 是最优的，只要证明对任意满足 $EI(X)=P$ 的 $I(X)$，有

$$Eu[w_0-X-P+I(X)]\leq Eu[w_0-X-P+I_{d^*}(X)]$$

由于，$u''(w)<0$

所以，$u[w_0-x-P+I(x)]-u[w_0-x-P+I_{d^*}(x)]$

$$\leq[I(x)-I_{d^*}(x)]u'[w_0-x-P+I_{d^*}(x)]$$

当 $I(x)<I_{d^*}(x)$ 时，由于，$u'(.)>0$

所以，$[I(x)-I_{d^*}(x)]u'[w_0-x-P+I_{d^*}(x)]<0$

即 $u[w_0-x-P+I(x)]<u[w_0-x-P+I_{d^*}(x)]$

用 X 代替 x，并且求数学期望

$$Eu[w_0-X-P+I(X)]<Eu[w_0-X-P+I_{d^*}(X)]$$

当 $I(X) \geqslant I_{d^*}(X)$ 时，因为

$$I_{d^*}(X) = \begin{cases} 0 & X \leqslant d^* \\ X - d^* & X > d^* \end{cases}$$

所以，$X - I_{d^*} \leqslant d^*$

又因为，$u'(.)$ 单调递减

所以，$u'[w_0 - x - P + I_{d^*}(x)] \leqslant u'(w_0 - d^* - P)$

用 X 代替 x，并求数学期望有

$$E[u(w_0 - X - P + I(X)) - u(w_0 - X - P + I_{d^*}(X))]$$
$$\leqslant E[I(X) - I_{d^*}(X)]u'(w_0 - d^* - P)$$

又 $EI(X) = EI_{d^*}(X) = P$

所以，$Eu[w_0 - X - P + I(X)] < Eu[w_0 - X - P + I_{d^*}(X)]$

所以，超赔损失保险是最优保险。

【例 3－10】 设某人拥有 1 000 元的财产，财产损失随机变量 X 服从 [0，1 000] 的均匀分布，他的效用函数为 $u(w) = w^{\alpha}(\alpha < 1)$，又设市场能以理赔的期望值为价格提供保单。若该投保人愿付出的保费为 300 元，问哪一种保单能使他获得最大期望效用？

解： 由于 $u(w) = w^{\alpha}$，满足 $u'(w) > 0, u''(w) < 0$，所以，对投保人最优的保险是具有免赔额 d^* 的超赔损失保险 $I_{d^*}(X) = \begin{cases} 0 & X \leqslant d^* \\ X - d^* & X > d^* \end{cases}$，其中最优免赔额 d^* 由下面关于 d 的方程决定：

$$300 = \int_d^{+\infty} (x - d) f(x) dx = \int_d^{+\infty} (x - d) \frac{1}{1\ 000} dx = \frac{(1\ 000 - d)^2}{2\ 000}$$

所以，$d^* = 225.4$

习　题

1. 假设基本危险单位为车年，现有一车于 2009 年 10 月 1 日参加保险，期限为 6 个月，求该车在 2010 年的已签危险量，已承担危险量和有效危险量。

2. 某保险公司有关机动车辆的数据如下：

2009 年 7 月 1 日费率　　（单位：千元）

	家庭轿车	高性能轿车
青年人驾驶	1.9	3.2
成年人驾驶	1.2	2.3

2006—2008 年度保单数

		家庭轿车	高性能轿车
2006 年	青年人驾驶	3 570	1 620
	成年人驾驶	5 820	1 280
2007 年	青年人驾驶	4 230	1 910
	成年人驾驶	6 320	1 320
2008 年	青年人驾驶	5 100	2 200
	成年人驾驶	6 930	1 500

(1) 利用危险扩展法计算 2006 年到 2008 年的相对于 2009 年 7 月 1 日费率的均衡已赚保费总和。

(2) 若到 2009 年 7 月 1 日，2006—2008 年总损失费用预测为 54 867(千元)，目标损失率为 60%，求损失率法中的调整因子 A。

3. 假定保单的保险期限为 12 个月；费率的增长情况如下：

10/1/2006　　+10%

10/1/2007　　+8%

10/1/2008　　+10%

如果危险单位在经验期内均匀分布，并已知各日历年均衡已赚保费为：

年份	已赚保费（千元）
2006	20 469
2007	23 543
2008	28 300

试用平行四边形法则求 2006—2008 年近似均衡已赚保费总额。

4. 某险种各个事故年的损失进展数据如下：

单位：损失千元

事故年	进展年				
	1	2	3	4	5
2005	1 055	1 614	1 822	1 927	2 014
2006	1 207	1 720	2 008	2 120	
2007	1 374	1 966	2 025		
2008	1 565	2 230			
2009	1 809				

求(1) 损失进展因子。

(2) 选定损失进展因子（取损失进展因子算术平均）和最终损失进展因子。

（3） 预测各发生年的最终损失。

5. 某险种各发生年的索赔次数如下表所示。

事故年	进展年				
	1	2	3	4	5
2005	912	1 137	1 220	1 230	1 230
2006	975	1 212	1 276	1 276	
2007	1 060	1 276	1 391		
2008	1 199	1 364			
2009	1 224				

求（1） 索赔次数进展因子。

（2） 选定索赔次数进展因子（取索赔次数进展因子算术平均）和最终索赔次数进展因子。

（3） 预测各发生年的最终索赔次数。

6. 根据下面的数据，假定利润与安全因子是5%，计算目标损失率。

承保保费	1 000 000
已赚保费	900 000
已发生损失和分摊损失调整费用	500 000
非分摊损失调整费用	40 000
佣金	200 000
税收、执照及其他费用	20 000
其他承保费用（展业费用）	50 000
一般管理费用	45 000
总的损失和费用	855 000

7. 某险种当前费率，均衡已赚保费，损失信息如下：

级别	费率（千元）	均衡已赚保费（千元）	经验损失与可分配损失（千元）
1	1.2	7 135	5 675
2	1.62	5 119	3 888
3	1.98	4 526	3 117

假设当前基础费率为1.2（千元），若整体指示费率变化量为1.15，即整体保费上升15%，

求（1） 冲销因子。

（2）各级别的新费率。

8. 一个投资者有 9 万元人民币，并且具有效用函数 $u(x)=2x^2+10$，他面临的随机损失的数学期望为 4 万元，方差为 10，求投保人最多能承受多少保费以预防其面临的随机损失。

9. 设某保险人和投保人的效用函数分别为：$u_1(x)=-e^{-\alpha x}, u_2(x)=-e^{-2\alpha x}$。现投保人面临一随机损失，损失随机变量为正态分布，且其的数学期望是 90，保险人假设此损失的方差为 σ^2，投保人认为其损失的方差为 36，为了使保险人收取的保费能被投保人接受，求 σ^2 的最大值。

10. 某人具有 400 个单位的财富，他的效用函数为：$u(x)=\sqrt{x}$，$x>0$，另外，他面临的损失随机变量 X 的分布列为：

X	0	50	100
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

他用 30 个单位的财富购买了具有免赔额的保单，计算在此情况下他的期望效用可能的最大值。

11. 设某人有 1 000 元财产，潜在损失在［0，100］上服从均匀分布，其效用函数为 $u(x)=x^{\frac{3}{4}}$，保单均以纯保费出售。若此人愿付 20 元保险费，哪种保单使其获最大期望效用？

12. 一个决策者具有如下特征：

（1）效用函数 $u(x)=1-e^{-\lambda x}$。

（2）初始资产为 ω_0。

（3）面临两个随机变量损失 X_1 和 X_2 的选择。

X_1 服从 Gamma（α_1，β），$\beta>\lambda$　X_1 服从 Gamma（α_2，β），$\beta>\lambda$

以下论述不正确的是：

A. 决策者的选择独立于 ω_0

B. 决策者的选择独立于 λ

C. 决策者的选择独立于 β

D. 决策者的选择独立于 α_1

E. 决策者的选择与随机损失变量的分布有关

13. 一个决策者拥有财产 50，其效用函数为 $u(w)=\ln w$，该决策者面临着发生概率为 1/2，损失额为 36 的潜在损失，若该决策者为此投保一保额为 20 的保单，求其愿意支付的最大保费。

14. 一保险人使用指数效用函数 $u(x)=-\alpha e^{-\alpha x}, \alpha>0$，以保费 P 承保服从 $N(1\,000, 10\,000)$ 分布的风险，已知 $P\geqslant 1\,250$，求绝对风险指数？

15. 设某投保人的初始财富为 100 个单位，效用函数 $u(x)=x$，损失随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{100}$，$0<x<100$，若理赔函数分别为 $I_1(x)=kx$，$I_2(x)=\begin{cases}0 & x<d \\ x-d & x\geqslant d\end{cases}$ 时，投保人愿付的最高保费 P 都等于 12.5，求 k 和 d。

第四章　非寿险费率校正

学习目标

- □ 在第二章第4节的基础上，掌握经验费率和信度保费的一般概念，学会运用信度理论厘定和校正非寿险费率
- □ 在第二章第2节的基础上，掌握计算贝叶斯保费的前提条件和基本方法，学会计算贝叶斯保费和近似计算贝叶斯保费
- □ 掌握Bühlmann信度模型及其结构参数估计方法，学会计算Bühlmann信度保费，了解Bühlmann信度保费与贝叶斯保费的一致性
- □ 掌握Bühlmann-Straub信度模型及其结构参数的估计方法，学会计算Bühlmann-Straub信度保费
- □ 掌握NCD的一般原理和数学模型，学会运用转移概率矩阵表示一个NCD系统和计算其平稳分布的方法

§4.1　经验费率

根据新的或者个别风险条件下的损失数据，对原先厘定的或者在一般风险条件下厘定的费率作校正以后形成的非寿险费率，称为经验费率。

经验费率的产生源于风险的不同质性。经验费率厘定方法的理论依据是信度理论。因此，根据经验费率厘定的非寿险保费称为信度保费。

信度保费的实质是对一类特殊风险下损失数据提供的信息和更广泛条件下损失数据提供的信息的加权平均。其中特殊条件风险下损失数据也叫经验数据，其提供的信息称为后验信息；更广泛条件下的损失数据提供的信息称为先验信息。后验信息的权重称为信度因子或信度系数。如果信度因子为1，那就意味着根据后验信息足以对一类或一份保单厘定保费，而无须什么先验信息。

在非寿险中，厘定经验费率或信度保费的目的在于使我们厘定或经过校正的保费更适合具体保险标的面临风险的实际情况，更符合商业保险的等价交换原则。

本章在第二章介绍的信度理论和方法的基础上着重介绍贝叶斯保费（Bayes Premium）、Bühlmann信度保费、Bühlmann-Straub信度保费，同时还介绍车险市场应用广泛的无赔款折扣优惠（No-Claim Discount，NCD）系统和奖惩（The Bonus-Malus）系统（BMS）。

§4.2 贝叶斯保费

运用贝叶斯统计理论厘定非寿险保费的具体方法如下：

设随机变量 X 表示某一险种的实际损失。X 可以代表该险种的索赔次数，索赔频率或赔款额。X 的风险非同质，其风险的大小用风险参数 θ 来度量。在 θ 给定后，X 的条件概率密度为 $f(x|\theta)$。θ 的结构函数（先验概率密度）为 $\pi(\theta)$。

假设我们有同样风险的前期历史经验数据 x_1，…，x_n。信度理论的目的是基于 x_1，…，x_n 预测下一期保费 X_{n+1}，X_{n+1} 和 x_1，…，x_n 有相同的风险。基于贝叶斯统计推断的理论，最精确信度理论（Great Accuracy Credibility Theory）在平方损失函数下，取 X_{n+1} 的条件数学期望为下一期保费 X_{n+1} 的预测。称这个保费为贝叶斯保费（Bayes Premium）。

在 θ 给定后，X_1，…，X_n 的条件密度为 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$，从而得 X_1，…，X_n 和 θ 的联合密度为 $\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)\right)\pi(\theta)$。故 $f(x_1, \cdots, x_n) = \int\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)\right)\pi(\theta)d\theta$ 是 X_1，…，X_n 的边际密度。同理，$f(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}) = \int\left(\prod_{i=1}^{n+1} f(x_i \mid \theta)\right)\pi(\theta)d\theta$ 是 X_1，…，X_n，X_{n+1} 的边际密度。因而，在 X_1，…，X_n 给定为 x_1，…，x_n 的条件下，X_{n+1} 的条件密度为：

$$f(x_{n+1} \mid x_1,\cdots,x_n) = \frac{f(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})}{f(x_1,\cdots,x_n)}$$

所以，X_{n+1} 的贝叶斯保费的计算公式为：

$$\begin{aligned} P &= E(X_{n+1} \mid x_1,\cdots,x_n) = \int x_{n+1} f(x_{n+1} \mid x_1,\cdots,x_n)\,dx_{n+1} \\ &= \frac{\int x_{n+1} f(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\,dx_{n+1}}{f(x_1,\cdots,x_n)} \\ &= \frac{\int x_{n+1}\left(\int\left(\prod_{i=1}^{n+1} f(x_i \mid \theta)\right)\pi(\theta)\,d\theta\right)dx_{n+1}}{\int\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)\right)\pi(\theta)\,d\theta} \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

必须指出的是，上述积分有时应理解为求和。

在 θ 给定后，X 的条件期望记为 $\mu(\theta)$，

$$\mu(\theta) = E(X \mid \theta) = \int x f(x \mid \theta)\,dx$$

在信度理论中，$\mu(\theta)$ 称为假设均值（Hypothesis Mean），又称风险保费（Risk Premium）。$\mu(\theta)$ 是风险参数为 θ 的保单的理想保费。它是体现风险特征的保费，但它通常是未知的。可以证明贝叶斯保费等于 $\mu(\theta)$ 的条件数学期望。

定理4－1　在θ给定后，假设X_1，…，X_n，X_{n+1}独立同分布，是来自于总体X的样本，X的条件密度为$f(x\mid\theta)$。假设θ的先验密度为$\pi(\theta)$。令$\mu(\theta)=E[X\mid\theta]$。那么在$X_1$，…，$X_n$给定的值为$x_1$，…，$x_n$后，$X_{n+1}$的贝叶斯保费

$$P=E(X_{n+1}\mid x_1,\cdots,x_n)=E(\mu(\theta)\mid x_1,\cdots,x_n)$$

证明：由于X_1，…，X_n和θ的联合密度为$\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i\mid\theta)\right)\pi(\theta)$，故$X_1$，…，$X_n$给定为的值$x_1$，…，$x_n$后，$\theta$的条件密度为：

$$f(\theta\mid x_1,\cdots,x_n)=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i\mid\theta)\right)\pi(\theta)}{f(x_1,\cdots,x_n)}$$

所以，

$$E(\mu(\theta)\mid x_1,\cdots,x_n)=\frac{\int\mu(\theta)\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i\mid\theta)\right)\pi(\theta)d\theta}{f(x_1,\cdots,x_n)}$$

由于，X_{n+1}是来自于X的样本，故$\mu(\theta)=E[X_{n+1}\mid\theta]=\int x_{n+1}f(x_{n+1}\mid\theta)dx_{n+1}$。从而

$$E(\mu(\theta)\mid x_1,\cdots,x_n)=\frac{\int\left(\int x_{n+1}f(x_{n+1}\mid\theta)dx_{n+1}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i\mid\theta)\right)\pi(\theta)d\theta}{f(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$=\frac{\int x_{n+1}\left(\int\left(\prod_{i=1}^{n+1}f(x_i\mid\theta)\pi(\theta)d\theta\right)dx_{n+1}\right.}{f(x_1,\cdots,x_n)}$$

由式（4.2.1），定理得到证明。

由式（4.2.1）可以看到，为了计算贝叶斯保费，必须知道条件密度$f(x\mid\theta)$和结构函数$\pi(\theta)$。而在实际问题中，它们往往是未知的，甚至不知道它们的参数表达形式。仅依据历史经验数据是很难估计出条件密度和结构函数的。这是计算贝叶斯保费的第一个困难。此外，即使知道或估计出了条件密度和结构函数，由于积分（或求和）计算的困难和复杂，很难得到贝叶斯保费的明显表达式。这是计算贝叶斯保费的第二个困难。由于这两个困难，贝叶斯保费并不实用。

§4.3　Bühlmann信度保费

4.3.1　Bühlmann信度模型与结构参数

正因为贝叶斯保费的不实用，瑞士精算学家Bühlmann提出，用历史经验数据的线性函数作为下一期保费的预测值。虽然信息量大大压缩，所求得的预测保费并不一定比原来的好，但由于Bühlmann提出的方法计算简

单，且容易理解，故一直沿用至今。

设随机变量 X 表示某一险种的实际损失。θ 为其风险参数。记 $\mu(\theta) = E(X\mid\theta)$，$v(\theta) = \mathrm{Var}(X\mid\theta)$。在第二章我们已经知道，$\mu(\theta)$ 称为假设均值，或风险保费。它是一种体现风险特征的保费。$v(\theta)$ 称为过程方差（Process Variance）。它度量了相同风险水平的内在差异。令

$$\mu = E(X) = E(E(X\mid\theta)) = E(\mu(\theta))$$
$$v = E(\mathrm{Var}(X\mid\theta)) = E(v(\theta))$$
$$a = \mathrm{Var}(E(X\mid\theta)) = Var(\mu(\theta))$$

$\mu(\theta)$ 是风险参数为 θ 时，X 的条件均值。而 μ 是不同风险参数，X 的条件均值的平均。所以 μ 称为 X 的总的均值，可视为在没有投保人风险水平的任何信息时，对其征收的保费。$v(\theta)$ 衡量了相同风险水平的内在差异，v 为它的均值（Expected Value of The Process Variance），称为 X 的同质方差。v 比较小，意味着相同风险水平的内在差异都不大。风险保费 $\mu(\theta)$ 依赖于风险参数 θ，a 为它的方差（Variance of The Risk Premium）。a 描述了因风险水平不同质导致的差异，称为 X 的异质方差。a 比较大，意味着不同风险水平之间的差异较为显著。所以 v 比较小，a 比较大，意味着风险的分类比较合理。在 Bühlmann 信度模型中，称 μ，v 和 a 为结构参数（Structure Parameters）。为了计算贝叶斯保费，必须知道条件密度 $f(x\mid\theta)$ 和结构函数 $\pi(\theta)$。而计算 Bühlmann 信度保费，只需要知道结构参数 μ，v 和 a 的值。基于历史经验数据，不难估计出结构参数 μ，v 和 a 的值。

【例 4－1】（第二章例 2.4.3 的续）由于 X 的分布为 Poisson 分布 $P(\lambda)$，所以，$\mu(\lambda) = E(X\mid\lambda) = \lambda, v(\lambda) = \mathrm{Var}(X\mid\lambda) = \lambda$。

（1）取 λ 的结构函数由表 4－1 所示。

表 4－1

λ	0.1719	1.4694
$\pi(\lambda)$	0.8876	0.1124

则

$$\mu = E(\mu(\lambda)) = E(\lambda) = 0.1719 \times 0.8876 + 1.4694 \times 0.1124 = 0.3177$$
$$v = E(v(\lambda)) = E(\lambda) = 0.3177$$
$$a = \mathrm{Var}(\mu(\lambda)) = \mathrm{Var}(\lambda)$$
$$= 0.1719^2 \times 0.8876 + 1.4694^2 \times 0.1124 - 0.3177^2 = 0.1680$$

（2）取 λ 的结构函数为伽玛分布，其密度函数为：

$$\pi(\lambda) = \frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\gamma\lambda}，其中\ \alpha = 0.5807，\gamma = 1.8284$$

由于伽玛分布的均值和方差分别是 α/γ 和 α/γ^2，所以，

$$\mu = E(\mu(\lambda)) = E(\lambda) = 0.5807/1.8284 = 0.3176$$

$$v = E(v(\lambda)) = E(\lambda) = 0.3176$$

$$a = \mathrm{Var}(\mu(\lambda)) = \mathrm{Var}(\lambda) = 0.5807/1.8284^2 = 0.1737$$

我们知道 X 的总的方差等于 X 的同质方差与异质方差之和：

$$\mathrm{Var}(X) = v + a \tag{4.3.1}$$

假设 X_1和 X_2的风险参数相等，都等于 θ。则在 θ 给定的条件下，X_1和 X_2条件独立。从而 $Cov(X_1, X_2 \mid \theta) = 0$。但是 Cov （X_1，X_2） 一般不等于 0。

定理 4－2　若 X_1和 X_2的风险参数相等，则

$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = a$。

证明：由于，

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

$$E(X_1X_2) = E(E(X_1X_2 \mid \theta)) = E(E(X_1 \mid \theta)E(X_2 \mid \theta)) = E((\mu(\theta))^2)$$

$$E(X_1)E(X_2) = E(E(X_1 \mid \theta))E(E(X_2 \mid \theta)) = (E(\mu(\theta)))^2$$

所以，

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E((\mu(\theta))^2) - (E(\mu(\theta)))^2 = Var(\mu(\theta)) = a$$

定理得到证明。

应该指出的是，在 X_1和 X_2的风险参数不相等时，$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$。

【例 4－2】　设损失随机变量 X 的 n 个观测值 x_1，x_2，…，x_n的风险参数都相等，试用过程方差和结构参数分别表示 Var （$\bar{x} \mid \theta$） 和 Var （$\bar{x}$）。

解：由观测值 x_1，x_2，…，x_n的条件独立性，

$$\mathrm{Var}(\bar{x} \mid \theta) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(x_i \mid \theta)/n^2 = \nu(\theta)/n。$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(x_i) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(x_i, x_j)$$

$$= n(\nu + a) + n(n-1)a = n\nu + n^2 a$$

所以，

$$\mathrm{Var}(\bar{x}) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n^2 = \nu/n + a。 \tag{4.3.2}$$

4.3.2　结构参数的估计

结构参数的估计可以通过如下方法得到。

假设有不同风险水平下的 r 组观测值，每一组都有 n 个数据：(x_{i1}，x_{i2}，…，x_{in})，$i = 1$，2，…，r。同组观测值的风险特征相同，不同组的观测值的风险特征不同。假设各组观测值的风险参数依次为 θ_1，θ_2，…，θ_r。又假设均值 $\mu(\theta_i)$和过程方差 $\nu(\theta_i)$的估计分别为：

$$\hat{\mu}(\theta_i) = \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}/n \tag{4.3.3}$$

$$\hat{\nu}(\theta_i) = \sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2/(n-1) \tag{4.3.4}$$

它们都是无偏估计。考虑到 $\mu = E(\mu(\theta)), \nu = E(\nu(\theta))$，我们分别取 $\hat{\mu}(\theta_i)$ 和 $\hat{\nu}(\theta_i)$ 的平均作为 μ 和 ν 的估计，即：

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{r}\bar{x}_i/r = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}/(rn) = \bar{x} \tag{4.3.5}$$

$$\hat{\nu} = \sum_{i=1}^{r}\hat{\nu}(\theta_i)/r = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2/(r(n-1)) \tag{4.3.6}$$

它们也都是无偏估计。

考虑到 a 是 $\mu(\theta_i)$ 的方差，并注意到 $\mu(\theta_i)$ 的估计为 $\bar{x}_i$，$i=1, 2, \cdots, r$，我们取 a 的估计为 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，…，$\bar{x}_r$的样本无偏方差 $\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_i - \bar{x})^2/(r-1)$ 。可以证明它并不是 a 的无偏估计。由于，

$$E\left(\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_i - \bar{x})^2/(r-1)\right) = a + \nu/n, \tag{4.3.7}$$

所以，修正后的

$$\hat{a} = \sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_i - \bar{x})^2/(r-1) - \hat{\nu}/n \tag{4.3.8}$$

为 a 的无偏估计。

如果各组观测值个数不等，假设依次有 n_1，n_2，…，n_r个观测值（x_{i1}，x_{i2}，…，x_{in_i}），$i=1, 2, \cdots, r$，那么，μ，ν，a 的估计值分别为：

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{r}n_i\bar{x}_i/\sum_{i=1}^{r}n_i = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}/N = \bar{x} \tag{4.3.9}$$

$$\hat{\nu} = \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)\hat{\nu}(\theta_i)/\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2/(N - r) \tag{4.3.10}$$

$$\hat{a} = \left(\sum_{i=1}^{r}n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2 - (r-1)\hat{\nu}\right)/\left(N - \sum_{i=1}^{r}n_i^2/N\right) \tag{4.3.11}$$

式中 $N = \sum_{i=1}^{r}n_i$ 为观测值总个数，式（4.3.10）中的 $\hat{\nu}$由式（4.3.9）所示。可以证明，这些都是无偏估计。

4.3.3 Bühlmann 方法

Bühlmann 方法的基本思想是：把损失随机变量 X 的观测值 x_1，x_2，…，x_n的线性函数 $\beta + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \cdots + \beta_nx_n$作为将来损失的可信性估计，并使均方损失达到最小。正由于这个原因，Bühlmann 信度也叫最小平方信度。

这里的 β_i是观测值 x_i在在线性函数中的权重，$i=1, 2, \cdots, n$。由于观测值 x_1，x_2，…，x_n的风险特征相同，所以可令 $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n$，这时 $\beta + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \cdots + \beta_nx_n = \beta + n\beta_1\bar{x}$，若记 $z = n\beta_1$，则将来损失的可信性估计为 $\beta + z\bar{x}$。

式中的 β 和 z 可以通过求均方损失函数 $L(\beta,z)=E((\beta+z\bar{x}-\mu(\theta))^2)$ 的极小值点得到。经过简单的计算可知，当

$$\begin{cases}\beta=(1-z)\mu \\ z=\dfrac{n}{n+\nu/a}\end{cases} \tag{4.3.12}$$

时，$L(\beta,z)$ 达到极小。

用这样计算得到 $\beta+z\bar{x}=(1-z)\mu+z\bar{x}$ 作为将来损失的估计而厘定的保费，称为 Bühlmann 信度保费（Bühlmann Credibility Premium）。这里的 z 就是信度因子，度量观测值的可信性程度。在非寿险精算实务中，μ 的估计值可以理解为不同风险水平下的损失观测值的总平均，$\bar{x}$ 则是某一特定风险水平下的损失观测值的平均，Bühlmann 信度估计用它们的加权平均作为这一特定风险水平下将来损失的估计值。

可以验证，信度保费与用贝叶斯估计得到的保费是一致的。

【例 4－3】 假设某保险公司有两份保单，这两份保单的风险特征不同。前四年各份保单的逐年赔款次数的记录如表 4－2 所示。

表 4－2

保单	年份			
	1	2	3	4
第一份	4	10	8	6
第二份	12	14	13	13

试用 Bühlmann 方法估计两份保单在未来一年的赔款次数。假设每次赔款的平均赔款额为 1 000 元，那么两份保单的信度保费各为多少？

解： 设 X_1，X_2 分别为两份保单的赔款次数随机变量，根据它们的观测值计算得到：

$$\bar{x}_1=(4+10+8+6)/4=7$$

$$\bar{x}_2=(12+14+13+13)/4=13$$

结构参数的估计为：

$$\hat{\mu}=(7+13)/2=10$$

$$\hat{\nu}=((4-7)^2+\cdots+(6-7)^2+(12-13)^2+\cdots+(13-13)^2)/(2(4-1))=11/3$$

$$\hat{a}=((7-10)^2+(13-10)^2)/(2-1)-(11/3)/4=205/12。$$

因为，$n=4$，由式（4.3.12），信度因子

$$z=\frac{n}{n+\nu/a}=205/216。$$

所以，两份保单的将来赔款次数的 Bühlmann 信度估计值分别为：

$$(1-z)\hat{\mu}+z\bar{x}_1=515/72=7.15$$

$$(1-z)\hat{\mu}+z\bar{x}_2=925/72=12.85$$

由于每次赔款的平均赔款额为1 000元，所以两份保单的信度保费分别为7.15千元和12.85千元。

在更一般的情况下，x_1，x_2，…，x_n的风险特征并不相同，$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n$不一定成立。这时，精算师可以用下述方法得到$\beta_1$，$\beta_2$，…，$\beta_n$的估计$\hat{\beta}_0$，$\hat{\beta}_1$，…，$\hat{\beta}_n$，以求得近似的贝叶斯保费。

定理4－3 在θ给定后，假设X_1，…，X_n，X_{n+1}独立同分布，是来自于总体X的样本。记$\mu_{n+1}(\theta)=E[X_{n+1}\mid\Theta=\theta]$。那么下列等式

$$E(X_{n+1})=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1E(X_1)+\cdots+\hat{\beta}_nE(X_n) \tag{4.3.13}$$

$$\text{cov}(X_i,X_{n+1})=\sum_{j=1}^{n}\hat{\beta}_j\text{cov}(X_i,X_j),i=1,2,\cdots,n \tag{4.3.14}$$

的解$\hat{\beta}_0$，$\hat{\beta}_1$，…，$\hat{\beta}_n$使

$$Q=E[\mu_{n+1}(\theta)-\beta_0-\sum_{j=i}^{n}\beta_jX_j]^2\text{ 最小。} \tag{4.3.15}$$

证明：令

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta_0}=-2E[\mu_{n+1}(\theta)-\beta_0-\sum_{j=1}^{n}\beta_jX_j]=0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta_i}=-2E[(\mu_{n+1}(\theta)-\beta_0-\sum_{j=1}^{n}\beta_jX_j)X_i]=0,i=1,2,\cdots,n$$

解得

$$E[\mu_{n+1}(\theta)]=\beta_0+\sum_{j=1}^{n}\beta_jE(X_j)$$

和

$$E[\mu_{n+1}(\theta)X_i]=\beta_0E(X_i)+\sum_{j=1}^{n}\beta_jE(X_jX_i),i=1,2,\cdots,n$$

于是有，

$$E(X_{n+1})=E[E(X_{n+1}\mid\Theta)]=E[\mu_{n+1}(\Theta)]=\beta_0+\sum_{j=1}^{n}\beta_jE(X_j)$$

即式（4.3.13）。

又有

$$\begin{aligned}E(X_iX_{n+1})&=E[E(X_{n+1}X_i\mid\Theta)]\\&=E[E(X_{n+1}\mid\Theta)E(X_i\mid\Theta)]\\&=E[\mu_{n+1}(\Theta)E(X_i\mid\Theta)]\\&=E[E(\mu_{n+1}(\Theta)X_i\mid\Theta)]\\&=E[\mu_{n+1}(\Theta)X_i]\\&=\beta_0E(X_i)+\sum_{j=1}^{n}\beta_jE(X_jX_i)\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

而

$$E(X_i)E(X_{n+1}) = \beta_0 EX_i + \sum_{j=1}^{n}\beta_j E(X_i)E(X_j) \qquad (4.2.17)$$

将式（4.3.16），式（4.3.17）相减得式（4.3.14）。

也可以类似地证明，在定理 4.3 的条件下等式（4.3.13）、（4.3.15）的解$\hat{\beta}_0$，$\hat{\beta}_1$，…，$\hat{\beta}_n$也使

$$Q_1 = E[E(X_{n+1} \mid X) - \beta_0 - \sum_{j=i}^{n}\beta_j X_j]^2 \qquad (4.3.18)$$

$$Q_2 = E[X_{n+1} - \beta_0 - \sum_{j=i}^{n}\beta_j X_j]^2 \qquad (4.3.19)$$

达到最小。

这些结论告诉我们上述信度保费 $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \cdots + \hat{\beta}_n X_n$就是贝叶斯保费的最优线性估计。

因此，我们可以简单地用 $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \cdots + \hat{\beta}_n X_n$作为近似的贝叶斯保费。

下面的例子告诉我们，如果赔款额随机变量序列还满足一些其他条件，那么信度保费

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \cdots + \hat{\beta}_n X_n$$

就是贝叶斯保费。

【例 4－4】 某险种各年度的保单数依次为：m_1，m_2，…，第 j 个年度平均每份保单的赔款额为 X_j，$j=1$，2，…。假设对任意 j，都有

$$E(X_j \mid \Theta) = \mu(\Theta)$$

及

$$\mathrm{Var}\,(X_j \mid \Theta) = w(\Theta) + \frac{\nu(\Theta)}{m_j}$$

成立。并假设在给定 Θ 的条件下，各年度赔款额 X_1，X_2，… 条件独立。试证明第 $n+1$ 个年度的信度保费为：

$$(1-Z)\mu + Z\bar{X}$$

其中，

$$\mu = E[\mu(\Theta)], a = \mathrm{Var}[\mu(\Theta)], v = E[\nu(\Theta)], \omega = E[w(\Theta)]$$

$$m^* = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w + \nu/m_j}, \bar{X} = \frac{1}{m^*}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w + \nu/m_j}X_j$$

信度因子

$$Z = \frac{am^*}{1 + am^*}。$$

证明 根据假设

$$\mathrm{Var}\,(X_j) = E[\mathrm{Var}\,(X_j \mid \Theta)] + Var\,[E(X_j \mid \Theta)]$$

$$= E\left[w(\Theta) + \frac{\nu(\Theta)}{m_j}\right] + \mathrm{Var}[\mu(\Theta)]$$

$$= w + \frac{\nu}{m_j} + a$$

对于 $i \neq j$，根据 X_i 与 X_j关于 Θ 条件独立，知

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) \\
&= E[E(X_iX_j \mid \Theta)] - E(X_i)E(X_j) \\
&= E[E(X_i \mid \Theta)E(X_j \mid \Theta)] - E[E(X_i \mid \Theta)]E[E(X_j \mid \Theta)] \\
&= E[\mu(\Theta)^2] - [E\mu(\Theta)]^2 \\
&= \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = a
\end{aligned}$$

再利用定理 4.3，信度保费 $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1X_1 + \hat{\beta}_2X_2 + \cdots + \hat{\beta}_nX_n$的系数满足

$$\mu = \hat{\beta}_0 + (\hat{\beta}_1 + \cdots + \hat{\beta}_n)\mu = \hat{\beta}_0 + \mu\sum_{j=1}^{n}\hat{\beta}_j \tag{4.3.20}$$

$$a = \sum_{j=1}^{n}\hat{\beta}_j a + \hat{\beta}_i\left(w + \frac{\nu}{m_i}\right), i = 1, 2, \cdots, n \tag{4.3.21}$$

由式（4.3.21）得

$$\hat{\beta}_i = \frac{a - \sum_{j=1}^{n}\hat{\beta}_j a}{w + v/m_i},$$

再由式（4.3.20）

$$\hat{\beta}_i = \frac{a - a(\mu - \hat{\beta}_0)/\mu}{w + v/m_i}$$

$$= \frac{a\hat{\beta}_0}{\mu(w + v/m_i)} \tag{4.3.22}$$

代入式（4.3.20）

$$\hat{\beta}_0 = \mu - \mu\sum_{j=1}^{n}\frac{a\hat{\beta}_0}{\mu(w + \nu/m_j)}$$

$$= \mu - \hat{\beta}_0 am^{*} \tag{4.3.23}$$

由式（4.3.22）、式（4.3.23）解得

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\mu}{1 + am^{*}}$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{a}{(w + \nu/m_i)(1 + am^{*})}, i = 1, 2, \cdots, n$$

因此，信度保费为：

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1X_1 + \hat{\beta}_2X_2 + \cdots + \hat{\beta}_nX_n$$

$$= \frac{\mu}{1 + am^{*}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{a}{(w + \nu/m_i)(1 + am^{*})}X_i$$

$$= \frac{\mu}{1 + am^{\bullet}} + \frac{am^{\bullet}}{1 + am^{\bullet}} \frac{1}{m^{\bullet}} \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{w + \nu / m_i} X_i$$

$$= (1 - z)\mu + z\bar{X}。$$

这个例子实际上就是下一节介绍的 Bühlmann-Straub 信度保费的特例。

§4.4 Bühlmann-Straub 信度保费

4.4.1 Bühlmann-Straub 信度模型

Bühlmann-Straub 信度模型是 Bühlmann 信度模型的推广。

对于具有相同风险特征的观测值 x_1，x_2，…，x_n，Bühlmann 信度模型假设 $E(X_i \mid \theta) = \mu(\theta)$，$\mathrm{Var}(X_i \mid \theta) = \nu(\theta)$。而 Bühlmann-Straub 信度模型则假设 $E(X_i \mid \theta) = \mu(\theta)$，$\mathrm{Var}(X_i \mid \theta) = \nu(\theta)/w_i$，其中 w_i称为观测值 x_i的权重，它可以意味着 x_i是 w_i个观测值的平均，也可以意味着人们对 x_i的信任程度。w_i越大，x_i的方差越小，x_i含有的信息就越多。

在 Bühlmann-Straub 信度模型中，本章定理 4.2 依然成立。

在 Bühlmann-Straub 信度模型中，样本均值

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i / \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i / w 。$$

于是有，

$$\mathrm{Var}(\bar{X} \mid \theta) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \mathrm{Var}(X_i \mid \theta) / w^2 = \nu(\theta)/w$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} w_i w_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 (\nu / w_i + a) + 2a \sum_{1 \le i < j \le n} w_i w_j = w\nu + w^2 a$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i X_i\right) / w^2 = \nu / w + a.$$

在 Bühlmann-Straub 信度模型中，将来损失的可信性估计为 $(1 - z)\mu + z\bar{X}$，其中信度因子 $z = \frac{w}{w + \nu / a}$。

4.4.2 结构参数的估计

Bühlmann-Straub 信度模型的结构参数的估计可在如下假设下得到：

设有损失随机变量 X 的 r 组观测数据，各组依次有 n_1，n_2，…，n_r个观测值（x_{i1}，x_{i2}，…，x_{in_i}），$i = 1$，2，…，r。同组的观测值的风险特征相同，不同组观测数据的风险特征不同，假设观测值 x_{ij}的权重为 m_{ij}，$i = 1$，2，…，r，$j = 1$，2，…，n_i。令

$$m_i = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}, m = \sum_{i=1}^{r} m_i, \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}x_{ij}/m_i$$

则结构参数 μ, ν, a 的估计值分别为：

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{r} m_i\bar{x}_i/m = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}x_{ij}/m = \bar{x} \quad (4.4.1)$$

$$\hat{\nu} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2 / \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1) \quad (4.4.2)$$

$$\hat{a} = (\sum_{i=1}^{r} m_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2 - (r-1)\hat{\nu})/(m - \sum_{i=1}^{r} m_i^2/m) \quad (4.4.3)$$

式（4.4.3）中的 $\hat{\nu}$可以由式（4.4.2）得到。可以证明它们都是无偏估计。

【例 4－5】 假设某保险公司有两组保单。同一组保单的风险特征相同，不同组保单的风险特征不同。前 3 年各组的逐年保单数和总赔款额的记录以及第 4 年的保单数如表 4－3 所示。

表 4－3

		年份			
		1	2	3	4
第 1 组	总赔款额	8 000	11 000	15 000	—
	保单数	40	50	70	75
第 2 组	总赔款额	20 000	24 000	19 000	—
	保单数	100	120	115	95

试计算第 4 年的信度保费。

解： 本例有 $r=2$ 组历史数据，每组都有 $n_1=n_2=3$ 个数据。

第 1 组：

$$x_{11}=8\ 000/40=200, x_{12}=11\ 000/50=220, x_{13}=15\ 000/70=214.29$$

$$m_{11}=40,\ m_{12}=50,\ m_{13}=70$$

$$\bar{X}_1=\frac{8\ 000+11\ 000+15\ 000}{40+50+70}=212.50,\ m_1=40+50+70=160$$

第 2 组：

$$x_{21}=20\ 000/100=200,\ x_{22}=24\ 000/120=200,\ x_{23}=19\ 000/115=165.22$$

$$m_{21}=100,\ m_{22}=120,\ m_{23}=115$$

$$\bar{X}_2=\frac{20\ 000+24\ 000+19\ 000}{100+120+115}=188.06,\ m_2=100+120+115=335$$

首先计算 $m=160+335=495$，然后据式（4.4.1）、式（4.4.2）和式（4.4.3）计算结构参数的估计：

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{160\times 212.50+335\times 188.06}{160+335}=195.96$$

$$\hat{\nu}=\frac{1}{(3-1)+(3-1)}(40\times(200-212.50)^2+50\times(220-212.50)^2$$

$$+70\times(214.29-212.50)^2+100\times(200-188.06)^2+120$$
$$\times(200-188.06)^2+115\times(165.22-188.06)^2)=25\ 161$$

$$\hat{a}=\frac{1}{495-(160^2+335^2)/495}(160\times(212.50-195.96)^2$$
$$+335\times(188.06-195.96)^2-(2-1)\times25\ 161)=182.48$$

第 1 组的信度因子的估计和信度保费分别为：

$$z_1=\frac{160}{160+25\ 161/182.48}=0.537$$

$$P_1=75\times((1-0.537)\times195.96+0.537\times212.50)=15\ 363$$

第 2 组的信度因子的估计和信度保费分别为：

$$z_2=\frac{335}{335+25\ 161/182.48}=0.708$$

$$P_2=95\times((1-0.708)\times195.96+0.708\times188.06)=18\ 085$$

可以证明，在结构参数 μ 已知的条件下，可用

$$\hat{a}=\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i}{m}(\bar{x}_i-\mu)^2-\frac{r}{m}\hat{v}\tag{4.4.4}$$

作为 a 的无偏估计。这个方法，在 $r=1$ 时也适用。

【例 4－6】 假设某保险公司有一团体保单，每一保险标的的风险特征相同，保费均为500 元。前 2 年的保险标的数和总赔款额的记录以及第 3 年的保险标的数如下。试计算该团体保单在第 3 年度总的信度保费，如表 4－4 所示。

表 4－4

	年份		
	1	2	3
总赔款额（元）	60 000	70 000	
保险标的数	125	15	200

解： 由题意，$r=1$ 组历史数据，$n_1=2$，且

$m_{11}=125$，$x_{11}=60\ 000/125=480$，

$m_{12}=150$，$x_{12}=170\ 000/150=466.67$，

$$\bar{x}_1=\frac{60\ 000+70\ 000}{125+150}=472.73,\quad m_1=125+150=275$$

由式（4.4.2）

$$\hat{v}=\frac{1}{2-1}(125\times(480-172.73)^2+150\times(466.67-472.73)^2)=12\ 115.15$$ 由于

$\mu=500$ 已知，由式（4.4.4）

$$\hat{a}=(472.73-500)^2-\frac{12\ 115.15}{275}=699.60$$

信度因子的估计和每个保险标的信度保费分别为：

$$z=\frac{275}{275+12\ 115.15/699.60}=0.94$$

$$P=500\times(1-0.94)+472.73\times0.94=474.37$$

该团体保单第 3 年总的信度保费为：

$$474.37\times200=94\ 874\text{ 元。}$$

在 $r\geqslant2$ 的情况下，各类风险的总的信度保费为：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}m_i[\hat{z}_i\bar{X}_i+(1-\hat{z}_i)\hat{\mu}]\\&=\sum_{i=1}^{r}m_i\bar{X}_i+\sum_{i=1}^{r}m_i(1-\hat{z}_i)(\hat{\mu}-\bar{X}_i)\\&=\sum_{i=1}^{r}m_i\bar{X}_i+\sum_{i=1}^{r}m_i\frac{\frac{\hat{\nu}}{\hat{a}}}{m_i+\frac{\hat{\nu}}{\hat{a}}}(\hat{\mu}-\bar{X}_i)\text{ 。}\end{aligned}$$

其中 $\sum_{i=1}^{r}m_i\bar{X}_i$ 为过去总的赔款额。如果要求总的信度保费等于过去总的赔款额，则应有

$$\sum_{i=1}^{r}m_i\frac{\frac{\hat{\nu}}{\hat{a}}}{m_i+\frac{\hat{\nu}}{\hat{a}}}(\hat{\mu}-\bar{X}_i)=0$$

即

$$\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i}{m_i+\frac{\hat{\nu}}{\hat{a}}}\bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i}{m_i+\frac{\hat{\nu}}{\hat{a}}}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{r}\hat{z}_i\bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{r}\hat{z}_i}$$

显然，这是 $\bar{X}_i$的以 $\hat{Z}_i$为权的加权算术平均数。这种计算 $\hat{\mu}$的方法称为信度加权平均法。

如果精算师还掌握一些关于损失分布的信息，那么可以用更简单的方法估计结构参数，并计算信度保费。

假设赔款额 X_{ij}的条件密度函数 $f_{X_{ij}\mid\Theta_i}(x_{ij}\mid\theta_i)$ 已知，而结构参数 Θ_i的分布 $\pi(\theta_i)$未知，这种模型称为半参数模型；如果 $\pi(\theta_i)$ 也已知则称之为参数模型。

【例 4－7】　某车险过去一年的赔款记录如表 4－5 所示。

表 4－5

赔款次数	0	1	2	3	4	总计
保险标的数	1 563	271	32	7	2	1 875

假设各保险标的结构参数的分布相同，每个标的在给定结构参数 Θ_i 的条件下，赔款次数服从参数为 Θ_i 的泊松分布。试用信度理论估计这些保险标的在未来一年的赔款频率。

解：根据表 4－5 中数据，计算得平均赔款次数 $\bar{X}=0.194$。

由泊松分布假设，第 i 个保险标的赔款次数 X_{i1} 的赔款次数的方差为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(X_{i1}) &= E[\mathrm{Var}\,(X_{i1}\mid\Theta_i)]+\mathrm{Var}[E(X_{i1}\mid\Theta_i)]\\ &= E(\Theta_i)+\mathrm{Var}\,(\Theta_i)\\ &= \mu+a\end{aligned}$$

又据式（4.3.1）$\mathrm{Var}\,(X_{i1})=\nu+a$，所以 $\nu=\mu$。

同时由表中数据可算得 $\mu+a$ 即 $\mathrm{Var}\,(X_{i1})$ 的无偏估计为：

$$\frac{\sum_{i=1}^{1875}(X_{i1}-\bar{X})^2}{1874}=0.226$$

μ 的无偏估计为 $\bar{X}=0.194$。

所以，a 的无偏估计

$$\hat{a}=0.226-0.194=0.032$$

且 $\hat{\nu}=\hat{\mu}=0.194$。

于是第 i 个保险标的的信度因子

$$\hat{z}_i=\frac{1}{1+\dfrac{0.194}{0.032}}=0.14。$$

第 i 个保险标的在未来一年的赔款频率为：

$$\begin{aligned}\hat{z}_iX_{i1}+(1-\hat{z}_i)\hat{\mu} &= 0.14X_{i1}+0.86\times0.194\\ &= 0.14X_{i1}+0.16684\end{aligned}$$

在 $f_{X_{ij}\mid\Theta_i}(x_{ij}\mid\theta_i)$ 和 $\pi(\theta_i)$ 都已知的假设下，则可用极大似然估计方法估计结构参数 μ，ν，a。

【例 4－8】　假设 $n_i=n$，$m_{ij}=1$ 且 $X_{ij}\mid\Theta_i\sim N(\Theta_i,b),\Theta\sim N(d,c)$

其中 b，c，d 为未知常数。试求结构参数 μ，ν，a 的极大似然估计。

解：根据已知条件，

$$\mu(\theta_i)=E[X_{ij}\mid\Theta_i=\theta_i]=\theta_i$$

$$\nu(\theta_i)=Var\,[X_{ij}\mid\Theta_i=\theta_i]=b$$

所以，$\mu=E\mu(\Theta_i)=E\Theta_i=d$

$$\nu = E\nu(\Theta_i) = b$$

$$a = \mathrm{Var}\,\mu(\Theta_i) = c$$

可以利用统计方法得到结构参数 μ，ν，a 的极大似然估计，

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}/rn$$

$$\hat{\nu} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2/r(n-1)$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_i - \bar{X})^2}{r} - \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{rn(n-1)}$$

§4.5 车险的无赔款优惠折扣和奖惩系统

4.5.1 NCD 系统及其构成要素

对投保人征收的信度保费，既考虑了总的赔付情况，也考虑了投保人所在的风险类别的赔付情况。比如，若家用载人轿车险的某个投保人是年轻人，使用车辆类型是高性能车辆，则对他征收的信度保费，既考虑了家用载人轿车险的总的赔付情况，也考虑了驾驶高性能车辆的年轻人的总的赔付情况。本节将进一步考虑如何根据投保人自身的赔付情况来征收保费的问题。一般来说，有两种不同的考虑方式。一种是回顾法（Retrospective Methods），另一种是前瞻法（Prospective Methods）。在保单期满时若投保人无赔案记录，则退回部分的保险费，这是回顾法。续保时根据投保人的赔案记录，预测其未来的赔案情况，然后定出他的保费，这是前瞻法。

目前盛行的根据投保人自身的赔付情况征收保费的系统有两类。一类是无赔款折扣优惠（No-Claim Discount，NCD）系统，另一类是奖惩（The Bonus-Malus，B-M）系统。在 NCD 系统，没有赔案记录的投保人的续保保费打的折扣大，而有赔案记录的投保人的续保保费打的折扣小，直止不打折扣，缴纳全额保费。而在 B-M 系统，有赔案记录的投保人的续保保费有可能得到负的折扣，缴纳比全额保费更多的续保保费。NCD 和 B-M 系统使用的都是前瞻法，它们通常用于汽车保险。

一个 NCD 系统至少有两个组成部分：保费折扣率等级和转移规则。比如，某个 NCD 系统由三个不同等级的折扣率组成。它们是 0%，30% 和 50%，分别意味着缴纳全额保费，缴纳全额保费的 70% 和 50%。根据上一年的赔案情况如何在保费折扣率等级间转移的规则称为转移规则。比如，假设上述 NCD 系统的转移规则为，如果上一年无赔案，保单持有人上升一

个等级，享受更高一级的折扣优惠，但当他已经在最高等级时，他将继续留在该等级享受最高一级的折扣优惠。而上一年只要有赔案，就回到或继续待在0%折扣等级，缴纳全额保费。这个转移规则可列表表示如表 4－6 所示。

表 4－6

初始折扣率等级	一年后折扣率等级	
	上一年无赔案	上一年有赔案
0%	30%	0%
30%	50%	0%
50%	50%	0%

4.5.2 NCD 系统的数学模型

假设一年中没有赔案发生，有一个、二个等赔案发生的概率和保单持有人所在的等级无关，那么上述 NCD 系统的等级变动的概率可以排列成如下的矩阵：

$$\begin{array}{cc} & \text{一年后等级} \\ & \begin{array}{ccc} 0\% & 30\% & 50\% \end{array} \\ \text{初始等级} \begin{array}{c} 0\% \\ 30\% \\ 50\% \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 \\ 1-p_0 & 0 & p_0 \\ 1-p_0 & 0 & p_0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.5.1}$$

其中 p_0 表示一年间没有赔案发生的概率，而 $1-p_0$ 表示一年间至少有一件赔案发生的概率。这个矩阵称为转移概率矩阵，记为 P。

假设 NCD 系统的保费折扣率有 r 个等级，则转移概率矩阵 P 为 $r\times r$ 阶矩阵。记 $P=(p_{ij})1\leqslant i,j\leqslant r$，其中 p_{ij} 是第 i 行和第 j 列上的元素，他是从等级 i，一年后变动到等级 j 的条件概率：$p_{ij}=P$（一年后等级 $j\mid$ 初始等级 i）。显然，对所有的 $i=1,2,\cdots,r$，都有 $\sum_{j=1}^{r} p_{ij}=1$。转移概率矩阵同一行上的元素之和等于 1。我们约定，行指标 i 越大，初始等级越高，享受的折扣率越大；而列指标 j 越大，一年后等级越高，续保时享受的折扣率越大。

【例 4－9】 香港地区实行的 NCD 系统的保费折扣率有 6 个等级：0%，20%，30%，40%，50% 和 60%。其转移规则如表 4－7 所示。

表 4-7

初始折扣率等级	一年后折扣率等级		
	上一年赔案数 0	上一年赔案数 1	上一年赔案数 2+
0%	20%	0%	0%
20%	30%	0%	0%
30%	40%	0%	0%
40%	50%	0%	0%
50%	60%	30%	0%
60%	60%	40%	0%

如果上一年没有赔案，保单持有人上升一个等级，享受更高一级的折扣优惠，或继续享受最高一级的折扣优惠。如果上一年有一件赔案，初始折扣率等级为 0%，20%，30% 和 40% 的投保人在续保时，将不再享受折扣优惠，初始折扣率等级为 50% 和 60% 的投保人将降低等级，分别享受 30% 和 40% 折扣率。而上一年只要有两件或两件以上的赔案，就不再享受折扣优惠，全都缴纳全额保费。该 NCD 系统的转移概率矩阵为：

$$\begin{array}{cc} & \text{续保时等级} \\ & \begin{array}{cccccc} 0\% & 20\% & 30\% & 40\% & 50\% & 60\% \end{array} \\ \text{初始等级} \begin{array}{c} 0\% \\ 20\% \\ 30\% \\ 40\% \\ 50\% \\ 60\% \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p_0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p_0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ 1-p_0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 1-p_0-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_0 \\ 1-p_0-p_1 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.5.2}$$

其中 p_0表示一年间没有赔案发生的概率，p_1表示一年间恰有一件赔案发生的概率，而 $1-p_0-p_1$表示一年间至少有二件赔案发生的概率。

4.5.3 平稳分布

假设 NCD 系统的保费折扣率有 r 个等级。初始时刻第 i 个等级保单持有人数在总人数中的比例记为 $\pi_i^{(0)}$，$i=1, 2, \cdots, n$。显然，$\sum_{i=1}^{r}\pi_i^{(0)}=1$。称 $\pi^{(0)}=(\pi_1^{(0)},\pi_2^{(0)},\cdots,\pi_r^{(0)})$为 NCD 系统的初始分布。假设 NCD 系统的转移概率矩阵为 $P=(p_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$。如果一年后所有的保单持有人继续投保，那么第 i 个等级保单持有人所占的比例变动为：

$$\pi_i^{(1)}=\pi_1^{(0)}p_{1i}+\pi_2^{(0)}p_{2i}+\cdots+\pi_r^{(0)}p_{ri},\quad i=1, 2, \cdots, r$$

称 $\pi^{(1)}=(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \cdots, \pi_r^{(1)})$ 为 NCD 系统一年后的分布，可以验证：

$\sum_{i=1}^{r} \pi_i^{(1)} = 1$。

假设所有的保单持有人年年续保，并记 NCD 系统 n 年后的分布为 $\pi^{(n)} = (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \cdots, \pi_r^{(n)})$。则 $n+1$ 年后的分布 $\pi^{(n+1)} = (\pi_1^{(n+1)}, \pi_2^{(n+1)}, \cdots, \pi_r^{(n+1)})$ 和 n 年后的分布 $\pi^{(n)} = (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \cdots, \pi_r^{(n)})$ 有如下的关系：

$$\pi_i^{(n+1)} = \pi_1^{(n)} p_{1i} + \pi_2^{(n)} p_{2i} + \cdots + \pi_r^{(n)} p_{ri},\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

使用矩阵和向量的符号，上述关系可表示为：

$$(\pi_1^{(n+1)}, \cdots, \pi_r^{(n+1)}) = (\pi_1^{(n)}, \cdots, \pi_r^{(n)}) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix}$$

也可进一步简单地表示为：

$$\pi^{(n+1)} = \pi^{(n)} P \tag{4.5.3}$$

只要转移概率矩阵 P 满足一定的条件，好多年之后，即在 n 充分大之后，$\pi^{(n)}$ 和 $\pi^{(n+1)}$ 趋于相等，各个等级保单持有人数在总人数中的比例趋于稳定。设第 i 个等级保单持有人数在总人数中的比例稳定在 π_i，$i = 1, 2, \cdots, r$。则称 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_r)$ 为 *NCD* 系统的稳定分布。由（4.5.3）式，稳定分布满足方程 $\pi = \pi P$，即

$$(\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots,\ \pi_r) = (\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots,\ \pi_r) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix}$$

从而有方程组

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \cdots \pi_r p_{r1} \\ \qquad \cdots \\ \pi_r = \pi_1 p_{1r} + \pi_2 p_{2r} + \cdots + \pi_r p_{rr} \end{cases} \tag{4.5.4}$$

将上述方程组各个等式的左边和右边分别相加，将得到恒等式：$1 = 1$。所以这个方程组其实只有 $r-1$ 个方程。仅根据方程组求不出稳定分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_r)$ 的值。还必须利用等式：$\pi_1 + \cdots + \pi_r = 1$。根据这个等式和方程组（4.5.4），可以求得稳定分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_r)$ 的值。

【例 4-10】 考察转移概率矩阵（4.5.1），我们有方程组

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1(1-p_0) + \pi_2(1-p_0) + \pi_3(1-p_0) \\ \pi_2 = \pi_1 p_0 \\ \pi_3 = \pi_2 p_0 + \pi_3 p_0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

求得稳定分布：

$$\begin{cases}\pi_1 = 1 - p_0 \\ \pi_2 = p_0(1 - p_0) \\ \pi_3 = p_0^2\end{cases}$$

所以若干年之后，缴纳全额保费、缴纳全额保费的70%和50%的保单持有人的比例将分别稳定为 $1-p_0$，$p_0(1-p_0)$ 和 p_0^2，其中 p_0表示一年间没有赔案发生的概率。

【例4－11】 考察转移概率矩阵（4.5.2），我们有方程组

$$\begin{cases}\pi_1 = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4)(1 - p_0) + (\pi_5 + \pi_6)(1 - p_0 - p_1) \\ \pi_2 = \pi_1 p_0 \\ \pi_3 = \pi_2 p_0 + \pi_5 p_1 \\ \pi_4 = \pi_3 p_0 + \pi_6 p_1 \\ \pi_5 = \pi_4 p_0 \\ \pi_6 = (\pi_5 + \pi_6) p_0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1\end{cases}$$

求得稳定分布：

$$\begin{cases}\pi_1 = (1 - p_0 - 2p_0^2 p_1 + p_0^3 p_1)/(1 - 2p_0^2 p_1 - p_0^3 p_1) \\ \pi_2 = p_0(1 - p_0 - 2p_0^2 p_1 + p_0^3 p_1)/(1 - 2p_0^2 p_1 - p_0^3 p_1) \\ \pi_3 = p_0^2(1 - p_0 - p_0^2 p_1)/(1 - 2p_0^2 p_1 - p_0^3 p_1) \\ \pi_4 = p_0^3(1 - p_0)/(1 - 2p_0^2 p_1 - p_0^3 p_1) \\ \pi_5 = p_0^4(1 - p_0)/(1 - 2p_0^2 p_1 - p_0^3 p_1) \\ \pi_6 = p_0^5/(1 - 2p_0^2 p_1 - p_0^3 p_1)\end{cases} \tag{4.5.5}$$

若干年之后，缴纳全额保费，缴纳全额保费的80%、70%、60%、50%和40%的保单持有人的比例将分别稳定为上述的 π_1，…，π_6，其中 p_0 和 p_1分别表示一年间没有赔案发生和恰有一个赔案发生的概率。

4.5.4 NCD系统的作用

一个新的机动车辆险的投保人，他最初的保险费是依据其年龄、驾驶车辆的类别等因素而确定的。根据NCD系统，他以后的保险费将依据他自身的索赔记录。设计NCD系统的目的之一是，使得对投保人收取的保险费更接近他本人的风险水平。让我们通过实证分析，检验NCD系统有没有达到这个目的，NCD系统在处理风险异质性时的作用如何。

【例4－12】 考察香港地区实行的NCD系统（例4.5.1）。它的转移概率矩阵见式（4.5.2），稳定分布见式（4.5.5）。假设有2万人投保汽车保险，其中1万个投保人的风险状况比较好，其索赔次数的分布为Poisson分布 P（0.1），而另1万个投保人的风险状况比较差，其索赔次数的分布为Pois-

son 分布 P（0.2）。平均而言，前 1 万个投保人的索赔次数是后 1 万个投保人的索赔次数的一半。若假设这两类人的单次索赔的赔款额相同，那么后 1 万个投保人的保险费应该两倍于前 1 万个投保人的保险费。

由于前一类投保人的索赔次数的分布为 Poisson 分布 P（0.1），所以没有赔案发生和恰有一个赔案发生的概率分别是 $p_0 = e^{-0.1} = 0.90484$ 和 $p_1 = 0.1 \times e^{-0.1} = 0.09048$。代入式（4.5.5），得稳定分布为：

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.01788 \\ \pi_2 = 0.01618 \\ \pi_3 = 0.02199 \\ \pi_4 = 0.08983 \\ \pi_5 = 0.08128 \\ \pi_6 = 0.77284 \end{cases}$$

这 1 万个投保人在 6 个等级中的稳定人数如表 4－8 所示。

表 4－8

折扣率等级	0%	20%	30%	40%	50%	60%
稳定人数	179	162	220	898	813	7728

假设全额保费为 100（元），则他们总的保费收入为：

$$\begin{aligned} p_1 &= 179 \times 100 + 162 \times 80 + 220 \times 70 + 898 \times 60 + 813 \times 50 + 7728 \times 40 \\ &= 449\ 910\ (元) \end{aligned}$$

而后一类投保人的索赔次数的分布为 *Poisson* 分布 $P(0.2)$，所以没有赔案发生和恰有一个赔案发生的概率分别是 $p_0 = e^{-0.2} = 0.81873$ 和 $p_1 = 0.2 \times e^{-0.2} = 0.16375$。代入式（4.5.5），得稳定分布为：

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.07473 \\ \pi_2 = 0.06118 \\ \pi_3 = 0.06941 \\ \pi_4 = 0.14405 \\ \pi_5 = 0.11794 \\ \pi_6 = 0.53269 \end{cases}$$

这 10 000 个投保人在 6 个等级中的稳定人数如表 4－9 所示。

表 4－9

折扣率等级	0%	20%	30%	4%	50%	60%
稳定人数	747	612	694	1 441	1 179	5 327

他们总的保费收入为：

$$
\begin{aligned}
p_2 &= 747 \times 100 + 612 \times 80 + 694 \times 70 + 1\ 441 \times 60 + 1\ 179 \times 50 + 5\ 327 \times 40 \\
&= 530\ 730\ (\text{元})
\end{aligned}
$$

前一类投保人的风险状况比较好，其索赔次数的分布为 Poisson 分布 $P(0.1)$，总的保费收入 449 910 元。后一类投保人的风险状况比较差，其索赔次数的分布为 Poisson 分布 P（0.2），总的保费收入 530 730 元。平均而言，后一类投保人的平均损失是前一类投保人的两倍，但后一类投保人总的保费收入仅比前一类投保人多收了 18%。这一不公平的现象说明，NCD 系统在处理风险的异质性，区分两个不同风险的保单时，所起的作用是不大的。

由表 4-8 和表 4-9 可以看到，绝大多数的投保人集中在折扣率最高的等级。产生此种情况的原因，就在于 p_0很大。由于 p_0是没有赔案发生的概率，所以当 p_0很大，接近 1 时，恰有一件赔案发生的概率 p_1就很小。从而，$p_0^2p_1 \approx 0$，$p_0^3p_1 \approx 0$。据式（4.5.5），得稳定分布近似为：

$$
\begin{cases}
\pi_1 \approx 1 - p_0 \\
\pi_2 \approx p_0\ (1 - p_0) \\
\pi_3 \approx p_0^2\ (1 - p_0) \\
\pi_4 \approx p_0^3\ (1 - p_0) \\
\pi_5 \approx p_0^4\ (1 - p_0) \\
\pi_6 \approx p_0^5
\end{cases}
$$

由于 $1 - p_0$很小，所以 π_6比 π_i（$i = 1, \cdots, 5$）大得多。因此在折扣率最高等级集中了绝大多数的投保人。p_0越大，折扣率最高等级的投保人越多。

当然，在避免小额赔款方面，NCD 系统还是有所作用的。损失发生后，保单持有人就会考虑一个问题，要不要报案。若报案，虽然可以得到赔款，补偿损失，但有可能要降低折扣率优惠，缴纳更多的保费。若不报案，虽然损失得不到补偿，但有可能享受更高的折扣率优惠，少缴纳保费。所以当赔款额较小时，保单持有人往往不报案，以损失自负来换取更高的折扣优惠。NCD 系统可避免小额赔款，降低索赔成本和管理费用。

在转移概率矩阵（4.5.1）和（4.5.2）中的 p_0和 p_1分别定义为：没有发生赔案和恰发生一件赔案的概率。如果避免了小额赔款的发生，p_0应理解为没有发生赔案和发生了赔案，但没有报案的概率，p_1应理解为恰发生了一件赔案，而且报案的概率。显然，没有发生赔案和发生了赔案，但没有报案的概率比没有发生赔案的概率大。所以，避免了小额赔款之后，p_0变大了，从而导致有更多的投保人集中在折扣率最高的等级。NCD 系统在避免小额赔款发生的同时，增加了在折扣率最高等级的保单比重。

自 NCD 系统推出之后，有关它的争论从没有间断过。目前，比较多的人认为，NCD 系统在处理风险的异质性方面并没有多大的作用。但是许多国家和地区，许多汽车保险公司至今都在采用 NCD 系统。看来，不实行 NCD 系统的汽车保险公司，要想获得市场一定的份额、有力地吸引更多的投保人是不太可能的。

除了无赔款折扣优惠外，保险公司还有其他一些类别的折扣优惠。例如，安全装置折扣优惠。如果你的汽车附加了气囊、盗窃报警器和反锁制动装置等，你就可享受折扣优惠。安全装置的作用是有目共睹的。1959 年尼尔斯—博林发明的安全带，挽救了数不清的生命。瑞典是世界上道路交通最安全的国家之一。他的百万居民年车祸死亡人数仅为 9 人。从 1974 年起，瑞典就规定驾车者必须系安全带。1986 年后，瑞典更进一步规定，乘客也要系安全带。系安全带是瑞典道路交通安全的一个主要的原因。保险公司除安全装置折扣优惠外，还有多重保险折扣优惠。如果你在同一家保险公司购买了不同类型的其他保险，或者家庭成员都在同一家保险公司购买汽车险，就可享受折扣优惠。种种折扣优惠都是为了吸引更多的投保人。至于折扣优惠到什么程度，需要根据历史观察数据和经验精确地计算。

4.5.5 BMS 简介

如果说 NCD 仅仅在厘定保费时考虑对风险较小的被保险人的奖励，那么，BMS（The Bonus-Malus System）则既考虑了对风险低于一般水平的被保险人的“奖”，也考虑了对风险高于一般水平的被保险人的“惩”。

BMS 在本质上是一种经验估费系统。*BMS* 的数学定义可表述为：

（1）被保险人被分成若干个等级，第 i 个等级用 C_i表示，$i=1, 2, ..., s$，其中 s 表示折扣最高的等级。

（2）被保险人从某个特定的初始等级 C_{i_0}开始其驾驶生涯。

（3）在某个保险期限（通常为一年）内，一个被保险人所在的等级由他前期所在的等级和在前期的索赔次数惟一确定。

在国际车险市场上，各国保险人在厘定第三者责任保险费率时都采用 NCD 或 BNS 对被保险人的续保保费进行调整。

勒梅尔（Lemaire，1985 年、1995 年）对 30 个国家和地区的汽车保险费率条款进行了比较研究，尤其是对各国的 BMS 作了详尽的分析研究。他在其两本著作（Automobile Insurance: Actuarial Modeles，1985 年；Bonus-Malus System in Automobile Lnsurance，1995 年）中介绍了他和其他学者对汽车保险精算模型的研究成果。

在对 BMS 的研究中，精算师们提出了评价 BMS 的 5 条标准：

（1）稳定状态下的相对平均保费水平（RSAL）；

（2）被保险人所付保费的变异系数；

（3）稳定状态下的平均保费水平关于索赔频率的弹性；

（4）平均最优自留额；

（5）预测精度。

而从保险监管机构的角度考虑，费瑞尔（1974 年）提出了评价 BMS 的 4 条标准：

（1）威慑作用；

（2）被保险人的承受能力；

（3）公众的认可；

（4）费用分配的合理性，也就是对风险预测的精度问题。这一点是监管机构与精算师们的共识。

由于出发点不同，车险市场上的 BMS 往往是精算师与保险监管机构较量的结果。

勒梅尔（1995 年）对 30 个国家和地区的 BMS 从精算学的角度进行了分析，并构造了严厉性指数（可以定义为一个保险期限内有若干次索赔的被保险人应缴纳的保费与连续若干个保险期限内无索赔的被保险人应缴保费之比）对他们进行了综合排序，发现现存于车险市场上的 BMS 奖惩严厉性不足。正是由于对高风险的被保险人的惩罚不力，造成保险公司的保费收入逐年下降。对此，勒梅尔应用贝叶斯统计理论构造了最优 BMS 模型，并对负二项模型、泊松—逆高斯模型、二元风险模型运用期望值原理、方差原理和零效用原理进行了分析。

习　题

1. 在给定参数 $\Theta=\theta$ 的条件下，前 n 年的赔款额序列 $\{X_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 相互独立，条件密度函数为 $f(x\mid\theta)=\theta^2xe^{-\theta x}(x>0)$，$\Theta$ 的密度函数 $\pi(\theta)=\theta e^{-\theta}(\theta>0)$。计算贝叶斯保费 $E(X_{n+1}\mid x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及净保费 $E(X_{n+1})$。

2. 已掌握连续三年赔款额 X_1，X_2，X_3的如下信息：

$$E(X_1)=1,Var(X_1)=1,E(X_2)=2,Var(X_2)=2,E(X_3)=4,$$

$$Cov(X_1,X_2)=1,Cov(X_1,X_3)=2,Cov(X_2,X_3)=3,$$

试利用式（4.2.2）、式（4.2.3）确定第三年的信度保费。

3. 有两份保单，它们的风险特征不相同。对每份保单都观测三年：第一份保单的赔款依次为 3，5，7；第二份保单的赔款依次为 6，12，9。试计算这两份保单的 Bühlmann 信度保费。

4. 假设某保险公司有四份保单。它们的风险特征互不相同。前 7 年的

逐年赔款的记录记为 x_{i1}，…，x_{i7}，$i=1$，…，4。经计算，有

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{7}(x_{ij}-\bar{X}_i)^2 = 33.60, \bar{X}_i = \sum_{j=1}^{7}x_{ij}/7$$

$$\sum_{i=1}^{4}(\bar{X}_i-\bar{X})^2 = 3.30, \bar{X} = \sum_{i=1}^{4}\bar{X}_i/4$$

试计算信度因子 z 的值。

5. 假设某保险公司有两份保单，这两份保单的风险特征不同。前四年各份保单的逐年赔款次数的记录如下：

保单	年份			
	1	2	3	4
第一份	7	13	11	9
第二份	14	17	16	17

试用 Bühlmann 方法估计两份保单在未来一年的赔款次数。假设每次赔款的平均赔款额为 1 千元，那么两份保单的信度保费各为多少？

6. 有两组车险保单，风险特征不同，它们在过去四年的被保险车辆数和逐年赔款次数如下：

		年份			
		1	2	3	4
第 1 组	赔款次数	3	2	2	0
	被保险车辆数	2	2	2	1
第 2 组	赔款次数	2	1	0	
	被保险车辆数	4	3	2	

试应用 Bühlmann-Straub 信度模型估计每组保单的年期望赔款频率。

7. 假设某保险公司有两组保单。同一组保单的风险特征相同，不同组保单的风险特征不同。前 3 年各组的逐年保单数和总赔款额的记录以及第 4 年的保单数如下。

		年份			
		1	2	3	4
第 1 组	总赔款额	9 000	12 000	18 200	—
	保单数	30	50	70	80
第 2 组	总赔款额	25 000	26 000	30 000	—
	保单数	100	130	120	100

试分别计算两组保单第 4 年的信度保费。

8. 现有历史经验数据：

		年份		
		1	2	3
第 1 组	投保人数	8	12	5
	平均赔款额	96	91	113
第 2 组	投保人数	25	30	20
	平均赔款额	113	111	116

试计算各组下一年的信度保费。

9. 某汽车保险公司年轻驾驶员和成年驾驶员的投保人数和平均赔款额逐年统计数据如下：

投保人数

年份	成年驾驶员	年轻驾驶员
1998	2000	—
1999	1 000	200
2000	1 000	175
2001	1 000	125

平均赔款额　　（单位：百元）

年份	成年驾驶员	年轻驾驶员
1998	1	—
1999	4	12
2000	6	11
2001	3	15

试计算年轻驾驶员和成年驾驶员下一年的信度保费。

10. 某一 NCD 系统有三个折扣率等级：0%，30%和 50%。转移规则如下：

（1）如果一年间没有赔案，保单持有人将升高一个折扣率等级，或停留在最高折扣率等级。

（2）只要一年间有赔案发生，保单持有人将降低一个折扣率等级，或停留在最低折扣率等级。

令 p_0表示一年间没有赔案发生的概率。求转移概率矩阵。

11. （练习 4.10 的续）假设索赔次数服从 Poisson 分布为 $P(0.05)$。如果开始的时候有 10 000 个投保人，他们全都享受最高折扣率优待，则一年后他们在各个折扣率等级的人数是多少？假设他们都续保了，则再一年后他们在各个折扣率等级的人数是多少？如果他们年年续保，试求他们在各

个折扣率等级的稳定人数。这时，他们的平均保费是多大的折扣率？

12. （练习 4.11 的续）又假设索赔次数服从 Poisson 分布为 $P(0.15)$。试求这 10 000 个投保人在各个折扣率等级的稳定人数。他们的平均保费是多大的折扣率？和练习 11 的结果作比较，试说明 NCD 系统在辨别风险的高和低，处理风险的异质性方面的作用如何？

13. 某 NCD 设四个折扣等级：0%，10%，20%，30%。初始保费为 500 元，共有 1 000 份保单。每个被保险人每年发生保险事故的概率分布如下：$p_0=0.8$，$p_1=0.2$。转移规则为：

（1）若在一年中无赔案发生，投保人上升一级或停留在最高折扣等级；

（2）若在一年中有一次赔案发生，投保人停留在原折扣等级；

（3）若在一年中有一次以上赔案发生，投保人退回到最低折扣等级。

求稳定状态下保险公司每年的保费收入。

14. 某 NCD 设三个折扣等级：0%，20%，40%。转移规则为：

（1）若在一年中无赔案发生，投保人上升一级或停留在 40% 折扣等级；

（2）若在一年中有赔案发生，投保人退回到 0% 折扣等级。

假设每张保单的索赔次数服从参数为 $\lambda=0.2$ 的泊松分布，若每份保单的全额保费为 4 000 元，计算达到稳定状态时每份保单的平均保费。

15. 某 NCD 的转移概率矩阵为：

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{一年后等级} \\
 & \begin{array}{ccc} 0\% & 35\% & 45\% \end{array} \\
\text{初始等级}\ \begin{array}{c} 0\% \\ 35\% \\ 45\% \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 \\ 1-p_0 & 0 & p_0 \\ 0 & 1-p_0 & p_0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

其中 p_0 表示无索赔的概率。若全额保费是 1 000 元，试计算处于不同保费等级的被保险人值得索赔的最低损失额（假设以后各年均无索赔发生）。

第五章　非寿险准备金评估

学习目标

- □ 了解非寿险责任准备金的概念，理解保险公司提取责任准备金的必要和准备金的构成
- □ 掌握未到期责任准备金的各种评估方法，理解各种评估方法的适用条件，并对其做充分性检验，理解保费不足准备金提取的必要性
- □ 掌握未决赔款准备金的各种评估方法，理解各种评估方法的优缺点及其适用条件
- □ 掌握直接理赔费用准备金和间接理赔费用准备金的评估方法
- □ 能对未决赔款准备金做合理性检验

§5.1　非寿险责任准备金概述

5.1.1　非寿险责任准备金的概念

保险公司的经营是负债经营，它有一个很显著的特点，即业务收入发生在先，赔款支出发生在后。根据大数法则的原理，保险公司承保大量的同类风险保单，通过管理和运作客户预先缴纳的保费所形成的保险基金，达到分散风险、分摊损失并获取利润的目的。但是保险公司对客户的负债具有很大的不确定性，对于一份没有到期或是没有终止的保险合同来说，无法确定在保险期间内，是否会发生保险事故？即使知道已经发生了保险事故，也不一定能很快确定最终的理赔金额和结案时间。因此，保险公司必须定期对这些未了责任进行评估。

非寿险业务，是指除人寿保险以外的保险，包括财产损失保险、责任保险、信用保险、保证保险、短期健康保险和意外伤害保险①等以及上述保险的再保险业务。非寿险责任准备金，则是指经营非寿险业务的保险公司，

---

① 第九十五条　保险公司的业务范围：

（一）人身保险业务，包括人寿保险、健康保险、意外伤害保险等保险业务；

（二）财产保险业务，包括财产损失保险、责任保险、信用保险、保证保险等保险业务；

（三）国务院保险监督管理机构批准的与保险有关的其他业务。

保险人不得兼营人身保险业务和财产保险业务。但是，经营财产保险业务的保险公司经国务院保险监督管理机构批准，可以经营短期健康保险业务和意外伤害保险业务。

保险公司应当在国务院保险监督管理机构依法批准的业务范围内从事保险经营活动。

对其所承保的有效保单未了责任评估后的资金准备。对不同的评估时点而言，它是对该有效非寿险保单所承担的未了责任大小的最好估计。

5.1.2　非寿险责任准备金的构成

保险公司通常以每年的最后一天（12 月 31 日）作为会计评估日，对保险业务进行评估核算并编制相应报表。对于一张有效保单而言，以评估日为界，要么还没有发生保险事故，要么已经发生保险事故。相应地，责任准备金被分为保费责任准备金（Premium Reserve）和赔款责任准备金（Loss Reserve）。

对于还没有发生保险事故的有效保单，保险公司在本年度不需要承担任何赔款支付，但对于已收取的所有保费收入，是否可以作为已获取利润全部入账呢？以评估时点为界，该张有效保单的保费可以分为两部分：一部分覆盖从保单生效日到评估时点这段时间，称为“已赚保费”；另一部分覆盖从评估时点到保单到期日这段时间，称为“未赚保费”。保险事故可能发生在评估日和保单到期日之间的任一时刻，因此保险公司在评估日必须承担未来保险事故可能发生引起的责任，同时还应承担退保风险。根据会计核算的权责发生制原则，该段时间的保费不应作为利润直接入账，而应在评估日提取相应的准备金，以反映在评估时点保险公司所应承担的责任，该部分准备金称为“保费责任准备金”，也称为“未到期责任准备金”。

对于已经发生保险事故的有效保单，在未结案之前，保险公司就需要准备向保单持有人履行赔付责任并承担赔付过程中所发生的费用，这些统称为“赔款准备金”，包括未决赔款准备金（Outstanding Claim Reserve）和理赔费用准备金（Claim Adjustment Expense Reserve）。

根据评估时点和已发生事故报告日之间的关系，可以将未决赔款准备金进一步划分为两种，用图 5－1 来说明。

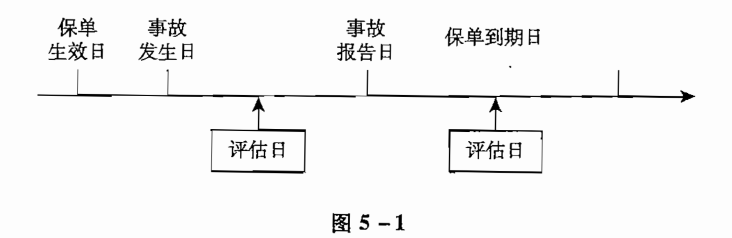


图 5－1

当评估日在事故发生日和事故报告日之间时，保险公司在评估日并不知道该事故已经发生，但保险公司肯定要对这种已发生，但由于报案延迟还未报案的赔案承担责任，为该种责任提取的准备金称为“已发生未报案未决赔款准备金”（Incurred But Not Reported Reserve，IBNR）。

当评估日在事故报告日之后时，保险公司已经收到赔案报告，但由于赔案延迟，必须经过勘查并确定赔付金额之后才会进行赔付，对于此类处于已报案但未完全赔付状态的赔案，保险公司必须计提相应的准备金，称为“已发生已报案未决赔款准备金”（Reported Claim Reserve）。

保险公司在处理赔案的过程当中，会发生相关费用，为这些费用计提的准备金称为“理赔费用准备金”。根据费用的具体情况，可以将理赔费用准备金作进一步的细分。其中，直接发生于具体赔款的费用，称为直接理赔费用，如专家费、律师费、损失检验费等，需计提直接理赔费用准备金；不是直接发生于具体赔案的费用，称为间接理赔费用，需计提间接理赔费用准备金，如理赔员工的薪酬等。

总之，根据有效保单在评估日是否已经发生保险事故，可以将非寿险责任准备金分为未到期责任准备金和赔款责任准备金两大类。其中赔款责任准备金包括未决赔款准备金和理赔费用准备金。根据评估日、事故发生日以及事故报告日之间的关系，可以将未决赔款准备金进一步划分为已发生已报案赔款准备金和已发生未报案未决赔款准备金。

在本章以下内容中，5.2 节介绍未到期责任准备金评估，5.3 节介绍未决赔款准备金，5.4 节介绍保费不足准备金和理赔费用准备金，5.5 节对未决赔款准备金的合理性进行检验。

§5.2 未到期责任准备金评估

对于在评估日尚未发生保险事故的有效保单，保险公司必须计提责任准备金，以承担未来可能发生的保险事故引起的责任，同时还应承担退保风险，该部分责任准备金即是未到期责任准备金，也称“保费责任准备金”。

按保险期间的长短，我们可以将保险合同划分为两类：一类是 1 年以内（包括 1 年）的短期合同，另一类是 1 年以上的长期合同。这两类合同在风险分布上存在着很大的差异，因此对未到期责任准备金的评估方法也有差异。非寿险业务大多为短期合同，通常为 1 年期，本节主要针对 1 年以内（包括 1 年）的短期合同，介绍其未到期责任准备金的评估方法。

按照被评估险种或险类的风险分布状况，未到期责任准备金的评估方法通常可以分为比例法和风险分布法。

5.2.1 比例法

比例法假设保费是均匀流入的，因此所承保风险在整个保单期间服从均匀分布，从而未到期责任准备金与未经历的保险期间长度成正比。根据

假设的不同，比例法又可以分为年比例法（1/2 法）、季比例法（1/8 法）、月比例法（1/24 法）和日比例法（1/365 法）。

1. 年比例法（1/2 法）、季比例法（1/8 法）。1/2 法假设每年的保费收入均匀流入，因此可近似地认为所有承保保单从年中开始生效，每张保单在年底只能赚到当年保费的一半。

以 1 年期保单为例，采用 1/2 法评估 2008 年的业务在 2008 年 12 月 31 日的未到期责任准备金为：

$$\frac{1}{2}\times \text{当年度保费收入} \qquad (5.2.1)$$

与年比例法类似，1/8 法假设保费在每个季度是均匀流入的，因此可近似地认为每个季度所有承保保单从当季度的中间时刻开始生效，每张保单在当季度只能赚到当季度保费的一半。

以 1 年期保单为例，采用 1/8 法评估 2008 年的业务在 2008 年 12 月 31 日的未到期责任准备金。第 m 个季度的保费收入记为 p，则评估日 2008 年 12 月 31 为该季度提取的未到期保费责任准备金为：

$$\left(\frac{2m-1}{8}\right)\times p \qquad m=1,\ 2,\ 3,\ 4 \qquad (5.2.2)$$

将上述评估的每个季度的未到期责任准备金加总即得到当年业务在年末应计提的未到期责任准备金。

采用季比例法评估 1 年期以上保单的未到期责任准备金时，与 1 年期保单同样操作。下面以 2 年期和 3 年期的保单为例，评估截至 2008 年 12 月 31 日的长期未到期责任准备金，所采用的未赚保费因子如表 5－1 所示。

表 5－1 未赚保费因子

起始年份	起始季度	2 年期未赚保费因子	3 年期未赚保费因子
2006	1 季度		1/24
	2 季度		3/24
	3 季度		5/24
	4 季度		7/24
2007	1 季度	1/16	9/24
	2 季度	3/16	11/24
	3 季度	5/16	13/24
	4 季度	7/16	15/24
2008	1 季度	9/16	17/24
	2 季度	11/16	19/24
	3 季度	13/16	21/24
	4 季度	15/16	23/24

2. 月比例法（1/24 法）。1/24 法假设各月份的保费收入均匀流入，这样可以近似地认为所有的保单都从月中生效，每张保单在当月只能赚到半月的保费。

以 1 年期保单为例，采用 1/24 法评估 2008 年的业务在 2008 年 12 月 31 日的未到期责任准备金。第 m 个月的保费收入记为 p，则评估日 2008 年 12 月 31 为该月提取的未到期保费责任准备金为：

$$\left(\frac{2m-1}{24}\right)\times p \qquad m=1,\ 2,\ \cdots,\ 11,\ 12 \tag{5.2.3}$$

根据上述公式，可算得每月的未赚保费因子表，如表 5－2 所示。

表 5－2　　各月未赚保费因子表

2008 年起期月份	未赚保费因子	2008 年起期月份	未赚保费因子
1	1/24	7	13/24
2	3/24	8	15/24
3	5/24	9	17/24
4	7/24	10	19/24
5	9/24	11	21/24
6	11/24	12	23/24

对于 1 月份起期的保单的评估公式是：

1 月份所承保保单的保费 ×1/24；

对于 2 月份起期的保单的评估公式是：

2 月份所承保保单的保费 ×3/24；

……

⋮　……

对于 12 月份起期的保单的评估公式是：

12 月份所承保保单的保费 ×23/24。

将上述评估的每个月的未到期责任准备金加总即得到当年业务在年末应计提的未到期责任准备金。

采用月比例法评估 1 年期以上保单的未到期责任准备金时，与 1 年期保单同样操作。下面以 2 年期和 3 年期的保单为例，评估截至 2008 年 12 月 31 日的长期未到期责任准备金，所采用的未赚保费因子如表 5－3 所示。

表 5－3　　长期保单未赚保费因子

起始年份	起始月份	2 年期未赚保费因子	3 年期未赚保费因子
2006 年	1 月		1/72
	2 月		3/72
	3 月		5/72

续表

起始年份	起始月份	2 年期未赚保费因子	3 年期未赚保费因子
2006 年	⋮	⋮	⋮
	11 月		21/72
	12 月		23/72
2007 年	1 月	1/48	25/72
	2 月	3/48	27/72
	3 月	5/48	29/72
	⋮	⋮	⋮
	11 月	21/48	45/72
	12 月	23/48	47/72
2008 年	1 月	25/48	49/72
	2 月	27/48	51/72
	3 月	29/48	53/72
	⋮	⋮	⋮
	11 月	45/48	69/72
	12 月	47/48	71/72

3. 日比例法（1/365 法）。1/365 法是根据实际保单的承保期限，以日为基础逐单对未赚保费准备金进行评估的一种方法。该方法不需要任何假设，精确度最高，具体的计提公式如下：

$$W_i = \frac{w_{id} - v_{ib}}{w_{id} - w_{ic}} \times P_i \quad (5.2.4)$$

其中：

W_i——第 i 张保单的未赚保费准备金；

P_i——第 i 张保单的保费收入；

v_{ib}——评估日；

w_{id}，w_{ic}——第 i 张保单的保险止期和保险起期。

将当年所有保单业务按照该方法计算的未赚保费准备金相加，即得到 1/365 法下当年业务在评估日应计提的未到期责任准备金。

4. 各类方法的比较。月比例法、季比例法、年比例法均假设保费收入均匀流入，且假设条件越来越严格。但实务中假设条件通常很难满足，因此使用这些方法的评估准确性随着现实与假设条件背离程度的增加而下降。接下来我们以一个假设的例子来说明各种方法准确性的差异。表 5－4 为假设保费递增流入，各分类方法的评估结果，表 5－5 为假设保费递减流入，各分类方法的评估结果。

表 5－4　　　　保费递增流入下各方法的评估结果

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	未赚保费准备金
月保费收入	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	月比例法：50.91
季保费收入	6			15			24			33			季比例法：50.25
年保费收入	78												年比例法：39

表 5－5　　　　保费递减流入下各方法的评估结果

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	未赚保费准备金
月保费收入	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	月比例法：27.08
季保费收入	33			24			15			6			季比例法：27.75
年保费收入	78												年比例法：39

从以上两表可以看出，年比例法对于保费流入的变化没有任何反映，准确度最差，月比例法相对季比例法，变化较为敏感，准确度是三种方法中最高的。当保费集中在下半年时，实际的平均起保日在年中之后，而年比例法假设平均起保日在年中，这必然导致年比例法的评估结果偏低，使得准备金提取不足，危及保险公司的偿付能力。类似的，当保费集中在上半年时，年平均法会使得准备金提取过多，影响保险公司当年度的利润。相比较而言，由于日比例法不需要任何假设，因此精确度最高。但它的计算量很大，对保险公司内部数据系统的要求较高。

我国保险法规定，对于机动车辆第三者责任险，必须采用日比例法计提未赚保费准备金。

5.2.2　分布法

实务中，经常会遇到风险分布不服从均匀分布的情况，若再坚持假设保费收入均匀流入而采用比例法来评估未赚保费准备金，必不准确。此时，需对风险的分布情况进行分析，寻找合适的方法，以下介绍常用的几种方法：七十八法则、逆七十八法则、流量预期法。

1. 七十八法则与逆七十八法则。七十八法则假设，自保险起期开始，风险分布呈每月递减的趋势，从倒数第一个月往前，依次为 1，2，3，……。而逆七十八法则则相反，假设保险分布呈每月递增的趋势，从第一个月往后，依次为 1，2，3，……。表 5－6 以一年期为例，列出七十八法则和逆七十八法则的已赚保费比例。

表 5-6 七十八法则、逆七十八法则已赚保费比例表

距离保险起期的第几个月	已赚保费比例	
	七十八法则	逆七十八法则
1	12/78	1/78
2	11/78	2/78
3	10/78	3/78
4	9/78	4/78
5	8/78	5/78
6	7/78	6/78
7	6/78	7/78
8	5/78	8/78
9	4/78	9/78
10	3/78	10/78
11	2/78	11/78
12	1/78	12/78

上述 $78 = 1 + 2 + \cdots + 11 + 12$，类似，对于一个两年期保单，分母 $= 1 + 2 + \cdots + 23 + 24 = 300$。

2. 流量预期法。流量预期法是以承保业务的实际风险分布为基础，并以风险比例来确定未赚保费准备金的一种方法。以一假设的风险分布为例，具体说明流量预期法的应用。

根据历史经验数据，假设某险种的风险分布和已赚保费比例已知，则相应的未赚保费比例也可以计算出来，如表 5-7 所示。

表 5-7 某险种的风险分布、已赚保费比例、未赚保费比例

时间	0—12 月	12—24 月	24—36 月	36—48 月	48—60 月
损失分布	2%	3%	10%	25%	60%
已赚保费比例	2%	5%	15%	40%	100%
未赚保费比例	98%	95%	85%	60%	0%

该方法适用于风险分布不均匀的险种，如保证保险、信用保险等，但该方法依赖于经验数据和假设，主观判断的要求比较高，不利于监管。

§5.3 未决赔款准备金评估的方法

由 5.1 内容我们已经知道，根据评估时点和已发生事故报告日之间的关系，我们可以将未决赔款准备金划分为已发生已报案未决赔款准备金和

已发生未报案未决赔款准备金（IBNR）。对于已发生已报案未决赔款准备金，常用的评估方法是逐案估计法、案均赔款法等，将在5.3.6中介绍。而对于IBNR准备金，实务中常用的评估方法主要有链梯法、分离法、案均法、准备金进展法、预算IBNR方法等，将在5.3.1—5.3.5中分别进行介绍。一般地，IBNR准备金有广义和狭义之分。

狭义的IBNR准备金，即保险公司为已经发生但尚未提出索赔的赔案而计提的准备金。广义的IBNR准备金，除狭义的IBNR准备金外，还包括以下三种准备金：

1. 已报案未立案准备金。指为保险事故已经报告，但保险公司尚未立案的赔案而计提的准备金。

2. 未决赔案的未来进展准备金。理赔人员对已报案赔案的赔款金额的最初估计不可能完全准确，随着时间的推移，可获得的信息越来越多，对赔案的估计也越来越准确。最初估计的已报案未决赔款准备金与最终的实际支付额之间的差额即为未决赔案的未来进展。该项准备金是保险人为这部分赔款调整额所作的资金准备。

3. 重立赔案准备金。已完成赔付的赔案，经过一段时间之后，如出现新的信息，有可能被重新提起并要求额外增加赔付。该项准备金是保险人为这部分额外赔付所作的资金准备。

在本章节中，除特殊说明，IBNR准备金均为广义的IBNR准备金。

在开始介绍各种评估方法之前，我们先对流量三角形做一个简单的介绍。

流量三角形是用于评估未决赔款准备金的重要工具。它实际上是一个上三角矩阵，各行代表着不同事故发生年（事故年），各列代表赔付的进展年，元素可以是赔款额或累积赔款额，也可以是索赔次数或累积索赔次数。表5－8是一个累积赔款额流量三角形的例子。

表5－8　　累积赔款额流量三角形　　单位：千元

事故年	进展年					于2008年末估计的未决赔款	估计的总赔款额
	0	1	2	3	4		
(1) 2004	1 003	1 855	2 413	2 999	3 337	363	3 700
(2) 2005	1 120	2 113	2 776	3 400	—	—	—
(3) 2006	1 275	2 423	3 235	—	—	—	—
(4) 2007	1 489	2 865	—	—	—	—	—
(5) 2008	1 730	—	—	—	—	—	—

若记2004年为事故年1，则2005年为事故年2，依次类推。进展年是

指赔款支付年与事故发生年之间的差值。表中的数字是累积赔款额，譬如事故年为 2006 年，进展年为 1 所对应的数字 2 423（千元）是 2006 年发生的事故截止 2007 年底的累积赔款额。在 2008 年末估计，2004 年发生的事故还有 363（千元）尚未赔付，即还存在未决赔款 363（千元）。则 2004 年发生的事故的总的赔款额为 3 337 +363（千元）=3 700（千元）。

5.3.1　链梯法

链梯法是准备金评估模型中应用最为广泛的技术。Taylor（1977）曾将链梯法描述为“由一系列比例链，如逐年链梯比率，组成一个梯子，使人能够从历史经验记录日预测到未来最终赔款。”链梯法的原理也正如这种直观描述，在链梯法中，其基本假设是：如果没有外来因素（如通货膨胀等）的干扰，则各事故年的赔款支出具有相同的发展模式。也就是说，在预测未决赔款时，各事故年使用的进展因子是一样的。链梯法既可以基于已付赔款数据，也可以基于已报案赔款数据。

1. 基于已付赔款数据的链梯法。

（1）基于已付赔款数据的链梯模型。已付赔款数据的链梯模型是基于累积已付赔款流量三角形，如表 5 -9 所示。流量表中的 $C_{i,j}$表示事故年 i，进展年为 j 的累积已付赔款额，S_1 表示最终赔款。

表 5 -9　　累积已付赔款流量三角形

事故年	进展年							最终值 UL
	0	1	…	j	…	$n-2$	$n-1$	
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	…	$C_{1,j}$	…	$C_{1,n-2}$	$C_{1,n-1}$	S_1
2	$C_{2,0}$,	$C_{2,1}$	…	$C_{2,j}$	…	$C_{2,n-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	…	$C_{n-j,j}$				
⋮	⋮	⋮	⋮					
n	$C_{n,0}$							

假设表中各进展年的已付赔款相互独立，各事故年的赔款支出具有相同的发展模式，即已付赔款延迟模式前后具有一致性，根据此规律可由流量三角形的上半部估计出流量三角形的下半部。未来赔款的估计公式为：

$$C_{i,j} = C_{i,n-i} \cdot \prod_{h=n-i}^{j-1} \hat{p}_h \qquad (5.3.1)$$

其中，$C_{i,j}$和 $C_{i,n-i}$分别表示第 i 个事故年在进展年 j 和 $n-i$ 的累积已付赔款；

$\hat{p}_h$—赔款从进展年 h 到进展年 $h+1$ 的逐年进展因子（Loss Development

Factor, LDF)。

从第 r 列到最终赔款 UL 的最终累积进展因子，可以看成是从第 r 列到第 $r+1$ 列、第 $r+1$ 列到第 $r+2$ 列、……第 n 列到 UL 列的逐年进展因子的累积，计算公式为：

$$\hat{f}_r = \hat{p}_r \cdot \hat{p}_{r+1} \cdot \cdots \hat{p}_n \tag{5.3.2}$$

其中 f_r 是第 r 列到 UL 列的最终累积进展因子。

用链梯法估计的事故年 i 的最终赔款 $\hat{S}_i = C_{i,n-i} \cdot \hat{f}_{n-i}$，则事故年 i 的未决赔款准备金（CV）的估计值 = 事故年 i 的最终赔款估计值 − 事故年 i 的累积已付赔款 $= \hat{S}_i - C_{i,n-i}$。

（2）逐年进展因子的估计方法。在实务中，计算逐年进展因子的方法很多，本书主要介绍简单算术平均法、原始加权平均法、几何平均法、近三年简单算术平均法、近三年原始加权平均法。

数据采用表 5－8 累积赔款额流量三角形，以 0～1 进展年为例，分别介绍各种方法。

表 5－10　　累积赔款额的逐年进展因子

事故年	进展年				
	0～1	1～2	2～3	3～4	4～∞
2004	1.8495	1.3008	1.2429	1.1127	1.1088
2005	1.8866	1.3138	1.2248		
2006	1.9004	1.3351			
2007	1.9241				

表 5－10 中的各个数值都是进展年的累积赔款额与前一个进展年的累积赔款额之比。如事故年 2006 的 0～1 进展因子是事故年 2006 第 1 个进展年的累积赔款额与事故年 2006 第 0 个进展年的累积赔款额的比值，即 1.9004 = 2 423/1 275。其他各事故年各进展年的逐年进展因子计算类似。

方法一：简单算术平均法。

$$0\sim1\text{ 进展年的逐年进展因子}\quad \hat{p}_0 = \frac{1.8495 + 1.8866 + 1.9004 + 1.9241}{4} = 1.8901$$

方法二：原始加权平均法。

$$0\sim1\text{ 进展年的逐年进展因子}\quad \hat{p}_0 = \frac{1\,855 + 2\,113 + 2\,423 + 2\,865}{1\,003 + 1\,120 + 1\,275 + 1\,489} = 1.8940$$

方法三：几何平均法。

0 ~ 1 进展年的逐年进展因子 $\hat{p}_0 = \sqrt[4]{1.8495 \times 1.8866 \times 1.9004 \times 1.9241}$

$= 1.8899$

方法四：近三年简单算术平均法。

0 ~ 1 进展年的逐年进展因子 $\hat{p}_0 = \dfrac{1.8866 + 1.9004 + 1.9241}{3} = 1.9037$

方法五：近三年原始加权平均法。

0 ~ 1 进展年的逐年进展因子 $\hat{p}_0 = \dfrac{2\ 113 + 2\ 423 + 2\ 865}{1\ 120 + 1\ 275 + 1\ 489} = 1.9055$

表 5 - 11　　各方法下的累积赔款额流量三角形逐年进展因子

事故年	进展年				
	0 ~ 1	1 ~ 2	2 ~ 3	3 ~ 4	4 ~ ∞
简单算术平均法	1.8901	1.3166	1.2338	1.1127	1.1088
原始加权平均法	1.8940	1.3181	1.2332	1.1127	1.1088
几何平均法	1.8899	1.3165	1.2338	1.1127	1.1088
近三年简单算术平均法	1.9037	1.3166	1.2338	1.1127	1.1088
近三年原始加权平均法	1.9055	1.3181	1.2332	1.1127	1.1088

从表 5 - 11 可以看出，各方法下的逐年进展因子有所不同，上述各种方法计算的进展因子主要是为准备金评估人员选定最终的进展因子提供依据。**在今后的习题或考试中，未特别指明，均采用原始加权平均法。**在得到逐年进展因子之后，需要计算最终的进展因子，各方法下最终的进展因子计算结果如表 5 - 12 所示。

表 5 - 12　　各方法下的累积赔款额流量三角形最终进展因子

事故年	进展年				
	0 ~ ∞	1 ~ ∞	2 ~ ∞	3 ~ ∞	4 ~ ∞
简单算术平均法	3.7880	2.0041	1.5222	1.2338	1.1088
原始加权平均法	3.7983	2.0055	1.5215	1.2338	1.1088
几何平均法	3.7874	2.0040	1.5222	1.2338	1.1088
近三年简单算术平均法	3.8153	2.0041	1.5222	1.2338	1.1088
近三年原始加权平均法	3.8214	2.0055	1.5215	1.2338	1.1088

以原始加权平均法为例，进展年 0 ~ ∞ 最终进展因子为：

$$\hat{f}_0 = 1.8940 \times 1.3181 \times 1.2332 \times 1.1127 \times 1.1088 = 3.7983$$

进展年 1 ~ ∞ 的最终进展因子为：

$$\hat{f}_1 = 1.3181 \times 1.2332 \times 1.1127 \times 1.1088 = 2.0055$$

（3）未决赔款准备金评估示例。仍采用表 5 - 8 累积赔款额流量三角形中的数据，以原始加权平均法为例，根据表 5 - 11 和表 5 - 12 估计的进展因子计算各事故年的最终赔款，如表 5 - 13 所示。

表 5 - 13　　赔款与最终赔款的估计值

事故年	进展年					估计的总赔款额
	0	1	2	3	4	
(1) 2004	1 003	1 855	2 413	2 999	3 337	3 700
(2) 2005	1 120	2 113	2 776	3 400	3 783	4 195
(3) 2006	1 275	2 423	3 235	3 989	4 439	4 922
(4) 2007	1 489	2 865	3 776	4 657	5 182	5 746
(5) 2008	1 730	3 277	4 319	5 326	5 926	6 571

例如，事故年 2006 年在进展年 3 的赔款估计值 = 3.235 × 1.2332 = 3 989，最终赔款 = 3 235 × 1.5215 = 4 922。

未决赔款准备金 CV 的估计值等于最终赔款估计值 $\hat{LU}$ 减去累积已付赔款 PC，即

$$CV = \hat{LU} - PC \qquad (5.3.3)$$

各方法的未决赔款准备金估计结果如表 5 - 14 所示。

表 5 - 14

事故年		5	4	3	2	1	总额
已付赔款		1 730	2 865	3 235	3 400	3 337	14 567
简单算术平均法	最终进展因子	3.788	2.0041	1.5222	1.2338	1.1088	
	最终赔款	6 553	5 742	4 924	4 195	3 700	25 114
	未决赔款	4 823	2 877	1 689	795	363	10 547
原始加权平均法	最终进展因子	3.7983	2.0055	1.5215	1.2338	1.1088	
	最终赔款	6 571	5 746	4 922	4 195	3 700	25 134
	未决赔款	4 841	2 881	1 687	795	363	10 567
几何平均法	最终进展因子	3.7874	2.004	1.5222	1.2338	1.1088	
	最终赔款	6 552	5 741	4 924	4 195	3 700	25 113
	未决赔款	4 822	2 876	1 689	795	363	10 546

续表

事故年		5	4	3	2	1	总额
近三年简单算术平均法	最终进展因子	3.8153	2.0041	1.5222	1.2338	1.1088	
	最终赔款	6 600	5 742	4 924	4 195	3 700	25 162
	未决赔款	4 870	2 877	1 689	795	363	10 595
近三年原始加权平均法	最终进展因子	3.8214	2.0055	1.5215	1.2338	1.1088	
	最终赔款	6 611	5 746	4 922	4 195	3 700	25 174
	未决赔款	4 881	2 881	1 687	795	363	10 607

2. 基于已报案赔款数据的链梯法。该方法与基于已付赔款数据的链梯法的计算过程完全一致，只是将基于已付赔款数据的链梯法中的累积已付赔款流量三角形替换为累积已报案赔款流量三角形而已，其中已报案赔款是已付赔款与已发生已报案未决赔款准备金之和。仍以表 5－8 累积赔款额流量三角形为例，并增加已报案未决赔款准备金流量三角形表，如表 5－15 所示。

表 5－15　　　　已报案未决赔款准备金流量三角形

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	1 772	1 400	1 028	600	380
(2) 2005	2 100	1 659	1 198	799	—
(3) 2006	2 378	1 970	1 500	—	—
(4) 2007	3 029	2 539	—	—	—
(5) 2008	3 600	—	—	—	—

将表 5－15 与表 5－8 相对应的数据相加，得到表 5－16 中的累积已报案赔款数据流量三角形。

表 5－16　　　　累积已报案赔款流量三角形

事故年	进展年					最终值
	0	1	2	3	4	
(1) 2004	2 775	3 255	3 441	3 599	3 717	3 717
(2) 2005	3 220	3 772	3 974	4 199	—	—
(3) 2006	3 653	4 393	4 735	—	—	—
(4) 2007	4 518	5 404	—	—	—	—
(5) 2008	5 330	—	—	—	—	—

以累积已报案数据流量三角形为基础，采用上述五种方法计算的各逐年进展因子如表 5－17 所示。

表 5－17　　各方法下的累积已报案赔款流量三角形逐年进展因子

事故年	进展年				
	0～1	1～2	2～3	3～4	4～∞
简单算术平均法	1.1858	1.0628	1.0513	1.0328	1
原始加权平均法	1.1876	1.0639	1.0517	1.0328	1
几何平均法	1.1857	1.0628	1.0513	1.0328	1
近三年简单算术平均法	1.19	1.0628	1.0513	1.0328	1
近三年原始加权平均法	1.1912	1.0639	1.0517	1.0328	1

在得到逐年进展因子之后，各方法下计算的最终进展因子结果如表 5－18所示。

表 5－18　　各方法下的累积已报案赔款流量三角形最终进展因子

事故年	进展年				
	0～∞	1～∞	2～∞	3～∞	4～∞
简单算术平均法	1.3684	1.154	1.0858	1.0328	1
原始加权平均法	1.3724	1.1556	1.0862	1.0328	1
几何平均法	1.3683	1.154	1.0858	1.0328	1
近三年简单算术平均法	1.3732	1.154	1.0858	1.0328	1
近三年原始加权平均法	1.3766	1.1556	1.0862	1.0328	1

仍采用表 5－16 累积已报案赔款流量三角形中的数据，以原始加权平均法为例，根据表 5－17 估计的进展因子计算各事故年的最终赔款与未决赔款准备金，结果如表 5－19 所示。

表 5－19　　赔款与最终赔款的估计值

事故年	进展年					估计的总赔款额
	0	1	2	3	4	
(1) 2004	2 775	3 255	3 441	3 599	3 717	3 717
(2) 2005	3 220	3 772	3 974	4 199	4 337	4 337
(3) 2006	3 653	4 393	4 735	4 980	5 143	5 143
(4) 2007	4 518	5 404	5 749	6 047	6 245	6 245
(5) 2008	5 330	6 330	6 734	7 083	7 315	7 315

例如，事故年 2006 年在进展年 3 的赔款估计值 = 4 735 × 1.0517 =

4 980，最终赔款 =4 735 ×1.0862 =5 143。

各方法的未决赔款准备金估计结果如表 5 – 20 所示。

表 5 – 20

事故年		5	4	3	2	1	总额
已付赔款		1 730	2 865	3 235	3 400	3 337	14 567
简单算术平均法	最终进展因子	1.3684	1.154	1.0858	1.0328	1	
	最终赔款	7 294	6 236	5 141	4 337	3 717	26 725
	未决赔款	5 564	3 371	1 906	937	380	12 158
原始加权平均法	最终进展因子	1.3724	1.1556	1.0862	1.0328	1	
	最终赔款	7 315	6 245	5 143	4 337	3 717	26 757
	未决赔款	5 585	3 380	1 908	937	380	12 190
几何平均法	最终进展因子	1.3683	1.154	1.0858	1.0328	1	
	最终赔款	7 293	6 236	5 141	4 337	3 717	26 724
	未决赔款	5 563	3 371	1 906	937	380	12 157
近三年简单算术平均法	最终进展因子	1.3732	1.154	1.0858	1.0328	1	
	最终赔款	7 319	6 236	5 141	4 337	3 717	26 750
	未决赔款	5 589	3 371	1 906	937	380	12 183
近三年原始加权平均法	最终进展因子	1.3766	1.1556	1.0862	1.0328	1	
	最终赔款	7 337	6 245	5 143	4 337	3 717	26 779
	未决赔款	5 607	3 380	1 908	937	380	12 212

3. IBNR 准备金评估。通过累积赔款额流量三角形和累积已报案赔款流量三角形估计出最终赔款 $\hat{LU}$ 和未决赔款准备金之后，在已知已报案未决赔款准备金（记为 RV）的情况下，我们可以很容易得到 IBNR 准备金，如下：

$$\text{IBNR} = CV - RV$$

$CV = \hat{LU} - PC$，其中，$\hat{LU}$ 为最终赔款估计值；PC 为累积已付赔款，则 IBNR 准备金的评估可表示为：

$$\text{IBNR} = CV - RV \tag{5.3.4}$$

$$= \hat{LU} - PC - RV \tag{5.3.5}$$

$$= \hat{LU} - RL \tag{5.3.6}$$

其中，RL 为已报案赔款。

仍以上述流量三角形为例，根据上述公式分别计算基于已付赔款数据和已报案赔款数据的 IBNR 准备金。以原始加权进展因子为例，IBNR 准备金评估结果如表 5 – 21。

表 5-21　　基于已付赔款数据的 IBNR 准备金评估

事故年	$\hat{LU}$	PC	RV	RL	CV	IBNR
1	3 700	3 337	380	3 717	363	-17
2	4 195	3 400	799	4 199	795	-4
3	4 922	3 235	1 500	4 735	1 687	187
4	5 746	2 865	2 539	5 404	2 881	342
5	6 571	1 730	3 600	5 330	4 841	1 241

这里 IBNR 准备金出现负数，主要是因为已报案未决赔款准备金 RV 的估计值超出最终赔款的估计值 $\hat{LU}$。

表 5-22　　基于已报案赔款数据的 IBNR 准备金评估

事故年	$\hat{LU}$	PC	RV	RL	CV	IBNR
1	3 717	3 337	380	3 717	380	0
2	4 337	3 400	799	4 199	937	138
3	5 143	3 235	1 500	4 735	1 908	408
4	6 245	2 865	2 539	5 404	3 380	841
5	7 315	1 730	3 600	5 330	5 585	1 985

从表 5-14 和表 5-20 评估结果看，两种数据用原始加权平均法对未决赔款准备金的估计值是不同的。应用累积已付赔款数据的估计值为 10 567，而应用已报案赔款数据的估计值为 12 190。这就需要准备金评估人员对产生差异的原因进行分析，找到可以进行解释的依据。

5.3.2　分离法

1. 分离法原理。在分离法中，记事故年或案发年为 $i=0, 1, 2, \cdots$，记进展年为 $j=0, 1, 2, \cdots$，则 $i+j$ 为支付年。其基本假设是认为不同事故年或案发年，在同一个支付年受到的外界影响是一样的。第 $i+j$ 个支付年所受到的外来因素影响的总体效应记为 λ_{i+j}。

分离法的基本工具是年内赔款额流量三角形（$C_{i,j}$），如表 5-23。

表 5-23　　年内赔款额流量三角形

事故年/案发年 i	进展年 j				
	0	1	2	…	k
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$	…	$C_{0,k}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	…	—
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	⋮	—	—
⋮	⋮	⋮	—	—	—
k	$C_{k,0}$	—	—	—	—

处于同一条左下至右上对角线上的元素，$i+j$ 相等。它们是不同事故年 i 在同一支付年 $i+j$ 所发生的赔款支付。

类似于链梯法，分离法假设各事故年在各进展年的赔款进展平均而言是平稳的，即 $E(C_{i,j})=\alpha_i\beta_j$。其中 $\alpha_i=E(C_{i,0})$ 表示事故年 i 在进展年 0 的赔款额，β_j 表示进展年 j 的赔款比例。

令

$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} E(C_{i,j}) = \alpha_i \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j$，表示事故年 i 所发生赔案的全部赔款；

$p_j = \dfrac{E(C_{i,j})}{\sum_{j=0}^{\infty} E(C_{i,j})} = \dfrac{\beta_j}{\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j}$，表示事故年 i 在第 j 个进展年支付的赔款占全部赔款的比例，从而有 $E(C_{i,j})=x_i p_j$，其中 $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ 。

一般来说，估计事故年 i 的最终赔款额比较困难。因为在估计过程中，除了通货膨胀和投资收益等因素需要考虑之外，各个保险事故造成的损失程度、责任和赔偿费用的确定等因素都可能影响最终赔款额金额。相比之下，赔案次数的估计要比较容易。因此我们先估计总的赔案次数。总的赔案次数的估计，可以基于索赔次数流量三角形，采用 5.3.1 节描述的链梯法进行估计。记 n_i 为事故年 i 发生的总赔案次数，$s_{i,j}=\dfrac{C_{i,j}}{n_i}$，则在 n_i 给定的条件下，我们有

$$E(s_{i,j}) = \frac{x_i}{n_i}\times p_j \tag{5.3.7}$$

式中 $s_{i,j}$表示事故年 i 在进展年 j 的平均每案赔款支付额；而$\dfrac{x_i}{n_i}$表示事故年 i 发生的所有赔案的平均每案赔款支付额。

与链梯法一样，分离法假设各事故年或案发年在各年的赔款进展是平稳的，除此之外，分离法还具有更严格的假设，即假设各事故年的平均每案赔款支付额相同，即$\dfrac{x_i}{n_i}$的值与 i 无关，记为 $c=\dfrac{x_i}{n_i}$。则我们有

$$E(s_{i,j}) = c\times p_j \tag{5.3.8}$$

如果再考虑通货膨胀和投资收益等外来因素的影响效应，我们可以将公式（5.3.8）修改为：

$$E(s_{i,j}) = c\times p_j\times\lambda_{i+j} \tag{5.3.9}$$

由于 c 为常数，若把 $c\times\lambda_{i+j}$仍然记为 λ_{i+j}，则有，

$$E(s_{i,j}) = p_j\times\lambda_{i+j} \tag{5.3.10}$$

式中 p_j 满足 $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ 。

将表 5－23 各行数据分别除以 n_i，得到以 $s_{i,j}=\dfrac{C_{i,j}}{n_i}$ 为元素的流量三角形，它是分离法的基础，如表 5－24 所示。

表 5－24　　　　事故年年内平均每案赔款支付额流量三角形

事故年/案发年 i	进展年 j				
	0	1	2	…	k
0	$s_{0,0}$	$s_{0,1}$	$s_{0,2}$	…	$s_{0,k}$
1	$s_{1,0}$	$s_{1,1}$	$s_{1,2}$	…	—
2	$s_{2,0}$	$s_{2,1}$	⋮	—	—
⋮	⋮	⋮	—	—	—
k	$s_{k,0}$	—	—	—	—

表 5－24 中的元素 $s_{i,j}=\dfrac{C_{i,j}}{n_i}$，其中 $C_{i,j}$ 为表 5－23 中的元素。分离法就是将 $s_{i,j}$ 分离成 p_j 和 λ_{i+j} 的乘积，并由此估计表 5－24 下三角形中的未知值。因此，p_j 和 λ_{i+j} 的估计是分离法的关键。

以下不给证明地给出 p_j 和 λ_{i+j} 的估计（可详细参阅《非寿险精算》，王静龙、汤鸣、韩天雄主编），首先对表 5－24 流量三角形做如下计算：

（1）将同一从左下至右上对角线上的元素相加，记为

$$d_h=\sum_{i+j=h}s_{i,j}\tag{5.3.11}$$

（2）将同一列的元素相加，记为

$$v_j=\sum_{i=0}^{k-j}s_{i,j}\tag{5.3.12}$$

（3）我们有：

$$\hat{\lambda}_k=d_k\tag{5.3.13}$$

$$\hat{p}_k=\frac{v_k}{\hat{\lambda}_k}\tag{5.3.14}$$

$$\hat{\lambda}_{k-1}=\frac{d_{k-1}}{1-\hat{p}_k}\tag{5.3.15}$$

$$\hat{p}_{k-1}=\frac{v_{k-1}}{\hat{\lambda}_k+\hat{\lambda}_{k-1}}\tag{5.3.16}$$

依次类推，$\hat{p}_j=\dfrac{v_j}{\sum_{t=j}^{k}\hat{\lambda}_t}$，$j=k, k-1, \cdots, 0$　　（5.3.17）

$$\hat{\lambda}_h=\frac{d_h}{1-\sum_{t=h+1}^{k}\hat{p}_t},\quad h=k-1, k-2, \cdots, 0\tag{5.3.18}$$

（4）估计 $\hat{\lambda}_h$，$h=k+1$，$k+2$，…，$2k$。

这是分离法估计未决赔款准备金的关键，在这里介绍两种简单的方法：

方法一：考虑通货膨胀和投资收益率的影响，假设以后各年的通货膨胀率和投资收益率分别为 r_∞ 和 f_∞，则

$$\hat{\lambda}_h=\hat{\lambda}_k\times\left(\frac{1+r_\infty}{1+f_\infty}\right)^{h-k} \tag{5.3.19}$$

根据此公式可以估计 $\hat{\lambda}_h$，$h=k+1$，$k+2$，…，$2k$ 。

方法二：回归法，根据 h 和 $\hat{\lambda}_h$ 之间的关系，建立回归方程，从而得到 $\hat{\lambda}_h$，$h=k+1$，$k+2$，…，$2k$ 的估计值。常用的回归方程如表 5－25 所示。

表 5－25

h	0	1	…	k
$\hat{\lambda}_h$	$\hat{\lambda}_0$	$\hat{\lambda}_1$	…	$\hat{\lambda}_k$

（ⅰ）线性回归方程：$\hat{\lambda}_h=a+b\cdot h$　　（5.3.20）

（ⅱ）指数回归方程：$\hat{\lambda}_h=a\cdot e^{bh}$　　（5.3.21）

2. 分离法估计未决赔款准备金示例。

【例 5－1】 我们仍采用5.3 节表 5－8 累积赔款额流量三角形，首先给出 2004—2008 年的索赔次数的估计，精算师可基于累积索赔次数流量三角形，应用链梯法，也可以根据经验估计，结果如表 5－26 所示。

表 5－26

事故年（i）	赔案次数（n_i）
(1) 2004	498
(2) 2005	539
(3) 2006	580
(4) 2007	612
(5) 2008	618

步骤一：由表 5－8 累积赔款额流量三角形计算出年内赔款额流量三角形（$C_{i,j}$），见表 5－27 所示。

表 5－27　　年内赔款额流量三角形

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	1 003	852	558	586	338
(2) 2005	1 120	993	663	624	—

续表

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(3) 2006	1 275	1 148	812	—	—
(4) 2007	1 489	1 376	—	—	—
(5) 2008	1 730	—	—	—	—

表 5－27 中各元素等于表 5－8 累积赔款额流量三角形该列与前一列数值的差，如事故年 2006 在进展年 2 的年内赔款额 $C_{3,2}=3\ 235-2\ 423=812$。

步骤二：由表 5－27 年内赔款额流量三角形和各事故年索赔次数的估计值 n_i，根据公式 $s_{i,j}=\dfrac{C_{i,j}}{n_i}$ 计算出年内平均每案赔款支付额流量三角形 $(s_{i,j})$，如表 5－28 所示。

表 5－28　　年内平均每案赔款支付额流量三角形

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	2.0141	1.7108	1.1205	1.1767	0.6787
(2) 2005	2.0779	1.8423	1.2301	1.1577	—
(3) 2006	2.1983	1.9793	1.4000	—	—
(4) 2007	2.4330	2.2484	—	—	—
(5) 2008	2.7994	—	—	—	—

步骤三：根据式（5.3.11）和式（5.3.12）计算出 d_h 和 v_j，估计出 $\hat{\lambda}_{i+j}$ 和 $\hat{p}_j$：

$d_0=2.0141$

$d_1=2.0779+1.7108=3.7887$

$d_2=2.1983+1.8423+1.1205=5.1611$

$d_3=2.4330+1.9793+1.2301+1.1767=6.8191$

$d_4=2.7994+2.2484+1.4000+1.1577+0.6787=8.2842$

$v_0=2.0141+2.0799+2.1983+2.4330+2.7994=11.5227$

$v_1=1.7108+1.8423+1.9793+2.2484=7.7808$

$v_2=1.1205+1.2301+1.4000=3.7506$

$v_3=1.1767+1.1577=2.3344$

$v_4=0.6787$

再由式（5.3.13）、式（5.3.17）和式（5.3.18）计算得出：

$$\hat{\lambda}_4 = d_4 = 8.2842$$

$$\hat{p}_4 = \frac{v_4}{\hat{\lambda}_4} = \frac{0.6787}{8.2842} = 0.0819$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{d_3}{1-\hat{p}_4} = \frac{6.8191}{1-0.0819} = 7.4274$$

$$\hat{p}_3 = \frac{v_3}{\hat{\lambda}_3+\hat{\lambda}_4} = \frac{2.3344}{7.4274+8.2842} = 0.1486$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{d_2}{1-\hat{p}_3-\hat{p}_4} = \frac{5.1611}{1-0.1486-0.0819} = 6.7071$$

$$\hat{p}_2 = \frac{v_2}{\hat{\lambda}_2+\hat{\lambda}_3+\hat{\lambda}_4} = \frac{3.7506}{6.7071+7.4274+8.2842} = 0.1673$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{d_1}{1-\hat{p}_2-\hat{p}_3-\hat{p}_4} = \frac{3.7887}{1-0.1673-0.1486-0.0819} = 6.2914$$

$$\hat{p}_1 = \frac{v_1}{\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2+\hat{\lambda}_3+\hat{\lambda}_4} = \frac{7.7808}{6.2914+6.7071+7.4274+8.2842} = 0.271$$

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{d_0}{1-\hat{p}_1-\hat{p}_2-\hat{p}_3-\hat{p}_4} = \frac{2.0141}{1-0.271-0.1673-0.1486-0.0819} = 6.0812$$

$$\hat{p}_0 = \frac{v_0}{\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2+\hat{\lambda}_3+\hat{\lambda}_4} = \frac{11.5227}{6.0812+6.2914+6.7071+7.4274+8.2842} = 0.3312$$

其中：$\hat{p}_0+\hat{p}_1+\hat{p}_2+\hat{p}_3+\hat{p}_4=1$

步骤四：估计 $\hat{\lambda}_h$，$h=5$，6，7，8

我们采用线性回归的方法进行估计，如表 5－29。

表 5－29

h	0	1	2	3	4
$\hat{\lambda}_h$	6.0812	6.2914	6.7071	7.4274	8.2842

线性回归方程：$\hat{\lambda}_h = a + b \cdot h = 5.85 + 0.5542 \cdot h$

所以可以得到表 5－30。

表 5－30

h	5	6	7	8
$\hat{\lambda}_h$	8.6209	9.1751	9.7293	10.2835

步骤五：根据公式 $C_{i,j} = n_i \cdot s_{i,j} = n_i \cdot p_j \cdot \hat{\lambda}_{i+j}$，补齐表 5－27 年内赔款额流量三角形右下部分数据。

表 5－31　　2008 年末估计的未决年内赔款支付额

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
（1）2004	1 003	852	558	586	338
（2）2005	1 120	993	663	624	381
（3）2006	1 275	1 148	812	743	436
（4）2007	1 489	1 376	883	834	488
（5）2008	1 730	1 444	949	893	520

将表 5－31 中所有的数字右下部分相加起来，即可以得到未决赔款准备金的估计值 7 571（千元）。

5.3.3　案均法

在 5.3.1 节中，我们介绍了链梯法，它可以基于已付赔款数据、已报案赔款数据来估计最终赔款，进而估计未决赔款准备金及 IBNR 准备金，但这种方法只考虑赔付额，忽略了赔付次数。在不稳定的经济形势下，如通货膨胀率高并激烈波动的情况下，光采用链梯法必然歪曲最终赔款的估计，进而导致未决赔款准备金及 IBNR 准备金估计结果的不准确。在本小节中，我们介绍案均法。该方法同样基于已付赔款数据、已报案赔款数据，分别对应于已付赔款次数流量三角形、已报案赔款次数流量三角形。案均法假定，案均赔款及相应的赔款次数流量三角形是平稳的，其计算原理类似于链梯法，以下仅以实例说明说明案均法的具体操作过程。

1. 基于已付赔款数据、已付赔款次数流量三角形的案均法。赔款数据仍以表 5－8 累积赔款额流量三角形为例，赔款次数数据采用表 5－32。

表 5－32　　累积已付赔款次数流量三角形　　单位：件

事故年	进展年					
	0	1	2	3	4	最终赔款次数
2004	275	375	426	466	479	495
2005	300	408	460	499	—	—
2006	326	440	500	—	—	—
2007	340	464	—	—	—	—
2008	350	—	—	—	—	—

步骤一：获取已付案均赔款流量三角形。

将表 5－8 累积赔款额流量三角形和表 5－32 累积已付赔款次数流量三角形中的相对应元素相除得到已付案均赔款，如表 5－33 所示。

表 5-33　　已付案均赔款　　单位：千元/件

事故年	进展年					
	0	1	2	3	4	最终已付案均赔款
2004	3.6473	4.9467	5.6643	6.4356	6.9666	7.4747
2005	3.7333	5.1789	6.0348	6.8136	—	—
2006	3.911	5.5068	6.47	—	—	—
2007	4.3794	6.1746	—	—	—	—
2008	4.9429	—	—	—	—	—

步骤二：预测最终已付案均赔款。

我们可以采用 5.3.1 节中介绍的链梯法，基于表 5-33 来预测最终已付案均赔款。这里仍采用原始加权法来估计进展因子，具体估计结果如表 5-34 所示。

表 5-34　　逐年进展因子及最终进展因子的估计

进展年	0~1	1~2	2~3	3~4	4~∞
逐年进展因子	1.3916	1.1623	1.1325	1.0825	1.0729
最终进展因子	2.1274	1.5288	1.3153	1.1614	1.0729

根据表 5-34 估计的最终进展因子，我们可以预测各事故年的最终已付案均赔款额，预测结果如表 5-35 所示。

表 5-35　　预测的最终已付案均赔款额

事故年	2008 年	2007 年	2006 年	2005 年	2004 年
2008 年末的已付案均赔款额	4.9429	6.1746	6.47	6.8136	6.9666
最终进展因子	2.1274	1.5288	1.3153	1.1614	1.0729
最终已付案均赔款额	10.5155	9.4397	8.51	7.9133	7.4747

步骤三：预测最终已付赔款次数。

同样，我们可以采用 5.3.1 节中介绍的链梯法，基于表 5-32 来预测最终已付赔款次数。这里仍采用原始加权法来估计进展因子，具体估计结果如表 5-36 所示。

表 5-36　　估计的进展因子及预测的最终已付赔款次数

事故年	2008 年	2007 年	2006 年	2005 年	2004 年
进展年	0~1	1~2	2~3	3~4	4~∞
已付赔款次数	350	464	500	499	479

续表

事故年	2008 年	2007 年	2006 年	2005 年	2004 年
逐年进展因子	1.3594	1.1333	1.0892	1.0279	1.0334
最终进展因子	1.7825	1.3112	1.157	1.0622	1.0334
预测的最终已付赔款次数	624	608	579	530	495

步骤四：估计最终赔款和未决赔款准备金。

由于最终赔款的估计值 = 预测的最终已付赔款次数 × 预测的最终已付案均赔款额，根据上述过程的结果，可以估计最终赔款和未决赔款准备金，结果如表 5－37 所示。

表 5－37　　最终赔款和未决赔款准备金的估计

事故年	预测的最终已付案均赔款额	预测的最终已付赔款次数	最终赔款的估计值	未决赔款准备金的估计值
2004	7.4745	495	3 700	363
2005	7.9133	530	4 194	794
2006	8.51	579	4 923	1 688
2007	9.4397	608	5 743	2 878
2008	10.5155	624	6 560	4 830
总　计			25 121	10 554

例如，事故年 2006 年的最终赔款为：8.51 ×579 =4 923 （千元），未决赔款准备金为：4 923 －3 235 =1 688 （千元）。

在 2008 年末估计的总的最终赔款为：3 700 + 4 194 + … + 6 560 = 25 121（千元），

各事故年总的已付赔款为：3 700 +3 400 + … +1 730 =14 567 （千元），

未决赔款准备金为：25 121 －14 567 =10 554 （千元）。

2. 基于已报案赔款数据、已报案赔款次数流量三角形的案均法。赔款数据以表 5－16 累积已报案赔款流量三角形为例，赔款次数数据采用表 5－38。

表 5－38　　累积已报案赔款次数流量三角形　　单位：件

事故年	进展年					
	0	1	2	3	4	最终赔款次数
2004	410	464	479	490	494	496
2005	446	503	530	540	—	—
2006	485	542	569	—	—	—
2007	535	592	—	—	—	—
2008	566	—	—	—	—	—

步骤一：获取已报案案均赔款流量三角形。

将表5－16累积已报案赔款流量三角形和表5－38累积已报案赔款次数流量三角形中的相对应元素相除得到已报案案均赔款，如表5－39所示。

表5－39　　单位：千元/件

事故年	进展年					
	0	1	2	3	4	最终已报案案均赔款
2004	6.7683	7.0151	7.1837	7.3449	7.5243	7.494
2005	7.2197	7.499	7.4981	7.7759	—	—
2006	7.532	8.1052	8.3216	—	—	—
2007	8.4449	9.1284	—	—	—	—
2008	9.417	—	—	—	—	—

步骤二：预测最终已报案案均赔款。

我们可以采用5.3.1节中介绍的链梯法，基于表5－38来预测最终已报案案均赔款。这里仍采用原始加权法来估计进展因子，具体估计结果如表5－40所示。

表5－40　　逐年进展因子及最终进展因子的估计

进展年	0～1	1～2	2～3	3～4	4～∞
逐年进展因子	1.0595	1.017	1.0299	1.0244	0.996
最终进展因子	1.1323	1.0687	1.0508	1.0203	0.996

根据表5－40估计的最终进展因子，我们可以预测各事故年的最终已报案案均赔款，预测结果如表5－41所示。

表5－41　　预测的最终已报案案均赔款

事故年	2008年	2007年	2006年	2005年	2004年
2008年末的已报案案均赔款	9.417	9.1284	8.3216	7.7759	7.5243
最终进展因子	1.1323	1.0687	1.0508	1.0203	0.996
最终已报案案均赔款	10.6629	9.7555	8.7443	7.9338	7.494

步骤三：预测最终已报案赔款次数。

同样采用链梯法，基于表5－38来预测最终已报案赔款次数。这里仍采用原始加权法来估计进展因子，具体估计结果如表5－42所示。

表 5－42　　估计的进展因子及预测的最终已付赔款次数

事故年	2008 年	2007 年	2006 年	2005 年	2004 年
进展年	0～1	1～2	2～3	3～4	4～∞
已报案赔款次数	566	592	569	540	494
逐年进展因子	1.1199	1.0457	1.0208	1.0082	1.004
最终进展因子	1.2101	1.0805	1.0333	1.0122	1.004
预测的最终已报案赔款次数	685	640	588	547	496

步骤四：估计最终赔款和未决赔款准备金。

由于最终赔款的估计值＝预测的最终已报案赔款次数×预测的最终已报案案均赔款，根据上述过程的结果，可以估计最终赔款和未决赔款准备金，结果如表 5－43 所示。

表 5－43　　最终赔款和未决赔款准备金的估计

事故年	预测的最终已付案均赔款额	预测的最终已付赔款次数	最终赔款的估计值	未决赔款准备金的估计值
2004	7.4942	496	3 717	380
2005	7.9338	547	4 337	937
2006	8.7443	588	5 141	1 906
2007	9.7555	640	6 240	3 375
2008	10.6629	685	7 303	5 573
总计	7.4942	496	26 738	12 171

例如，事故年 2006 年的最终赔款为：8.7443×588＝5 141（千元），未决赔款准备金为：5 141－3 235＝1 906（千元）。

在 2008 年末估计的总的最终赔款为：3 717＋4 337＋…＋7 303＝26 738（千元），

各事故年总的已付赔款为：3 700＋3 400＋…＋1 730＝14 567（千元），

未决赔款准备金为：26 738－14 567＝12 171（千元）。

3. IBNR 准备金评估。在估计最终赔款之后，根据式（5.3.4）—式（5.3.6）可以估计 IBNR 准备金。表 5－44 和表 5－45 分别给出在已付案均赔款和已报案案均赔款方法下，以原始加权法为例的 IBNR 的估计结果。

表 5－44　　基于已付案均赔款的 IBNR 准备金评估

事故年	$\hat{LU}$	PC	RV	RL	CV	IBNR
1	3 700	3 337	380	3 717	363	－17
2	4 194	3 400	799	4 199	794	－5

续表

事故年	$\hat{LU}$	*PC*	*RV*	*RL*	*CV*	IBNR
3	4 923	3 235	1 500	4 735	1 688	188
4	5 743	2 865	2 539	5 404	2 878	339
5	6 560	1 730	3 600	5 330	4 830	1 230
合计	25 120	14 567	8 818	23 385	10 553	1 735

表 5-45　　基于已报案赔款数据的 IBNR 准备金评估

事故年	$\hat{LU}$	*PC*	*RV*	*RL*	*CV*	IBNR
1	3 717	3 337	380	3 717	380	0
2	4 337	3 400	799	4 199	937	138
3	5 141	3 235	1 500	4 735	1 906	406
4	6 240	2 865	2 539	5 404	3 375	836
5	7 303	1 730	3 600	5 330	5 573	1 973
合计	26 738	14 567	8 818	23 385	12 171	3 353

5.3.4 准备金进展法

在 5.3.1 节中，我们介绍了链梯法，它要么基于已付赔款数据，要么基于已报案赔款数据。在 5.3.3 节中，我们介绍了案均赔款法，它要么基于已付赔款金额和已付赔款次数，要么基于已报案赔款金额、已报案赔款次数。前述的方法都忽略了已付赔款和已报案未决赔款准备金之间的关系。在本部分，我们介绍准备金进展法，该方法考虑已付赔款和已报案未决赔款准备金之间的关系，试图分析已报案未决赔款准备金的充足性，并估计最终赔款和未决赔款准备金。

在准备金进展法中，我们通过准备金进展率（Case Estimate Development Ratio，记作 CED 比率）来分析已报案未决赔款准备金在各进展年之间的流量模式，通过准备金支付率（Paid to Outstanding Ratio，记作 PO 比率）来分析已报案未决赔款准备金对已付赔款的充足率。已付赔款和已报案未决赔款准备金可以按报案年统计，也可以按事故年统计，相应地，准备金进展法也分为报案年准备金进展法和事故年准备金进展法。由于报案年准备金进展法只能够检验已报案未决赔款准备金的充足性，并不能得到未决赔款准备金的估计值，因此，本节只对事故年准备金进展法进行介绍。文中除非特别指明，准备金进展法均指事故年准备金进展法。按照事故年统计数据，随着时间的推移，不断地有新的数据进入统计范围，给准备金进展法的应用带来了一定的难度。因此，一般假定 IBNR 索赔和已报案赔款之间具有稳定的关系。对于很多报案较快的险种来说，在事故年的初期

可以积累大量的赔案数据，这也为评估 IBNR 提供了一个稳定的基础。

以下基于表 5－8 累积赔款额流量三角形和表 5－15 已报案未决赔款准备金流量三角形，具体说明准备金进展法的操作过程。

1. 准备金进展率和准备金支付率的估计。

步骤一：获取增量已付赔款流量三角形，如表 5－46 所示。

表 5－46　　增量已付赔款流量三角形

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	1 003	852	558	586	338
(2) 2005	1 120	993	663	624	—
(3) 2006	1 275	1 148	812	—	—
(4) 2007	1 489	1 376	—	—	—
(5) 2008	1 730	—	—	—	—

表中事故年 i 在进展年 j，$j \geq 1$ 的增量已付赔款等于表 5－8 中事故年 i 在进展年 j 的累积已付赔款减去事故年 i 在进展年 $j-1$ 的累积已付赔款。例如，事故年 2006 在进展年 2 的增量已付赔款 812＝3 235－2 423。

步骤二：估计准备金进展率和准备金支付率。

在准备金进展法中，事故年 i 在进展年 j 的已报案未决赔款准备金 RV_j，分解为两部分，一部分在下个进展年 $j+1$ 转化为已付赔款 PC_{j+1}，另一部分转变为下个进展年的已报案未决赔款准备金 RV_{j+1}。

$$\mathrm{CED}_{j\sim j+1}=\frac{RV_{j+1}+PC_{j+1}}{RV_j} \tag{5.3.22}$$

$$PO_{j\sim j+1}=\frac{PC_{j+1}}{RV_j} \tag{5.3.23}$$

基于表 5－15、表 5－46 和式（5.3.22），计算得到各事故年在各进展年的准备金进展率，结果如表 5－47 所示。

表 5－47　　准备金进展率

事故年	进展年			
	0～1	1～2	2～3	3～4
(1) 2004	1.2709	1.1329	1.1537	1.1967
(2) 2005	1.2629	1.1218	1.1878	—
(3) 2006	1.3112	1.1736	—	—
(4) 2007	1.2925	—	—	—
平均值	1.2844	1.1428	1.1708	1.1967

例如，事故年2006年在第1、2个进展年的已报案未决赔款准备金分别为1 970、1 500，在第2个进展年的赔付额为812，准备金进展率CED = $\frac{(1\ 500+812)}{1\ 970}=1.1736$。这里需要指出的是，若CED = 1，则表明进展年年初的已报案未决赔款准备金用于支付本年赔款之后，剩余部分恰好全部转为本年末的已报案未决赔款准备金；若CED < 1，则表明进展年年初的已报案未决赔款准备金过多，除了支付本年赔款和转入年末的已报案未决赔款准备金外，还有剩余；若CED > 1，则表明进展年年初的已报案未决赔款准备金不足。一般来说，随着赔案理赔过程的不断发展，关于赔案的信息也越来越多，已报案未决赔款准备金也越来越合理，后期CED率小于早期CED率。

准备金进展率的最终选定需要考虑很多因素，这里仅以各事故年准备金进展率的平均值作为选定的准备金进展率为例，介绍准备金进展法。例如，进展年1～2选定的准备金进展率 $1.1428=\frac{1.1329+1.1218+1.1736}{3}$。

基于表5－15、表5－46和式（5.3.23），计算得到各事故年在各进展年的准备金支付率，结果如表5－48所示。

表5－48　　准备金支付率

事故年	进展年			
	0～1	1～2	2～3	3～4
(1) 2004	0.4808	0.3986	0.57	0.5633
(2) 2005	0.4729	0.3996	0.5209	—
(3) 2006	0.4828	0.4122	—	—
(4) 2007	0.4543	—	—	—
平均值	0.4727	0.4035	0.5455	0.5633

例如，事故年2006年在第1个进展年的已报案未决赔款准备金分别为1 970，在第2个进展年的赔付额为812，准备金支付率 $PO=\frac{812}{1\ 970}=0.4122$。

同样，以各事故年的准备金支付率的平均值作为选定的准备金支付率，进展年1～2的选定准备金支付率 $0.4035=\frac{0.3986+0.3996+0.4122}{3}$。

2. 最终赔款和未决赔款准备金的估计。选定了准备金进展率（CED率）和准备金支付率（*PO*率）之后，可以估计未来的已报案未决赔款准备金和未来的已付赔款额。

未来的已报案未决赔款准备金 $RV_{j+1}=RV_j\times(\mathrm{CED}_{j-j+1}-PO_{j-j+1})$

(5.3.24)

未来的已付赔款额 $PC_{j+1}=RV_j\times PO_{j-j+1}$ (5.3.25)

基于表5-15，根据式（5.3.24）得到未来的已报案未决赔款准备金估计结果如表5-49所示。

表5-49 已报案未决赔款准备金的估计

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
2004	1 772	1 400	1 028	600	380
2005	2 100	1 659	1 198	799	506
2006	2 378	1 970	1 500	1 756	1 112
2007	3 029	2 539	1 877	1 174	743
2008	3 600	2 922	2 160	1 351	856

基于表5-15，根据式（5.3.25）得到未来已付赔款额的估计结果如表5-50所示。

表5-50 未来增量已付赔款额的估计

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	1 003	852	558	586	338
(2) 2005	1 120	993	663	624	450
(3) 2006	1 275	1 148	812	818	989
(4) 2007	1 489	1 376	1 024	1 024	661
(5) 2008	1 730	1 702	1 179	1 178	761

根据表5-50，可以得到未来的累积已付赔款额流量三角形，如表5-51所示。

表5-51 未来的累积已付赔款额流量三角形

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
2004	1 003	1 855	2 413	2 999	3 337
2005	1 120	2 113	2 776	3 400	3 850
2006	1 275	2 423	3 235	4 053	5 042
2007	1 489	2 865	3 889	4 913	5 574
2008	1 730	3 432	4 611	5 789	6 550

在2008年末估计的总的最终赔款 =3 337 +3 850 +5 042 +5 574 +6 550 = 24 353，各事故年总的已付赔款为：3 700 +3 400 + ··· +1 730 = 14 567（千元）。未决赔款准备金为：24 353 −14 567 =9 786（千元）。

需要指出的是，本实例中我们假定最终进展年为进展4，未考虑进展4之后的进展因子。

3. IBNR准备金的估计。在估计最终赔款之后，根据式（5.3.4）~式（5.3.6）可以估计IBNR准备金。表5−52给出在准备金进展法下的IBNR准备金的评估结果。

表5−52　　准备金进展法下的IBNR准备金评估

事故年	$\hat{LU}$	PC	RV	RL	CV	IBNR
1	3 337	3 337	380	3 717	0	−380
2	3 850	3 400	799	4 199	450	−349
3	5 042	3 235	1 500	4 735	1 807	307
4	5 574	2 865	2 539	5 404	2 709	170
5	6 550	1 730	3 600	5 330	4 820	1 220
合计	24 353	14 567	8 818	23 385	9 786	968

5.3.5　预算IBNR方法

应用5.3.1节介绍的链梯法评估未决赔款准备金时，假设赔款是稳定的，即赔案报告模式、赔付模式、理赔模式基本不变。但实际情况很难满足这一假设条件，尤其是在最近的承保年。因为赔付数据缺失，累积进展因子较高，并且波动较大，预测结果也相对不准确。而5.4.3节介绍的准备金进展法，对于那些历史数据不足的新业务或容易受异常赔款影响的业务，该方法的评估结果也不准确。预算IBNR方法就是为了解决上述问题而提出来的。

预算IBNR方法又称B-F方法，是通过已决赔款或已报案赔款及其在未来的期望发展估计终极损失。预算IBNR方法既可应用于已付赔款额数据，也可以应用于已报案赔款数据。在已付赔款数据下，最终的赔款被分成两部分：已付赔款和未决赔款准备金。前一部分为已知量，后一部分可用最终赔款的一个比例来估计，这一比例记为p。在已报案赔款数据下，最终的赔款也被分成两部分：已报案赔款（已付赔款额与已报案未决赔款准备金的和）和IBNR准备金。前一部分也为已知量，后一部分同样可用最终赔款的一个比例来估计，这一比例记为p'。

预算 IBNR 方法的关键是 p 或 p' 的估计，其具体计算公式为：

$$p = 1 - \frac{1}{f} \tag{5.3.26}$$

其中：f—链梯法中对应的最终累积进展因子。

应用预算 IBNR 方法评估未决赔款准备金或 IBNR 准备金的步骤为：

（1）计算期望最终损失。

期望最终损失 Bult = 期望最终赔付率 × 已赚保费 = $\lambda \times EP$ （5.3.27）

其中 λ—期望最终赔付率。

（2）估计未决赔款准备金 CV 或 IBNR 准备金。

在已付赔款数据下：$CV = \text{Bult} \times \left(1 - \frac{1}{f}\right)$ （5.3.28）

在已报案赔款数据下：$\text{IBNR} = \text{Bult} \times \left(1 - \frac{1}{f}\right)$ （5.3.29）

1. *基于已报案赔款数据的预算 IBNR 方法*。基于已报案赔款数据的预算 IBNR 方法，称为 $BF-RC$ 方法。仍以表 5－16 累积已报案赔款流量三角形为例，已赚保费为表 5－53 中的数据。

表 5－53 已赚保费

事故年	（5）2008	（4）2007	（3）2006	（2）2005	（1）2004
已赚保费 EP	7 450	6 583	5 598	5 089	4 586

以链梯法中原始加权平均法为例，根据表 5－18 中的结果，可以得到各进展年的最终累积进展因子，进而可以得到 p' 的估计值，计算结果如表 5－54 所示。

表 5－54 p' 的估计值

事故年	进展年				
	0～∞	1～∞	2～∞	3～∞	4～∞
原始加权平均法 f	1.3724	1.1556	1.0862	1.0328	1
$p' = 1 - \frac{1}{f}$	0.2713	0.1346	0.0794	0.0318	0

需要说明的是，$\frac{1}{f}$ 表示已报案赔款占最终赔款额的比例，因此 $1 - \frac{1}{f}$ 为剩余赔款占最终赔款额的比例。

假设期望最终赔付率 λ 统一为 87%，根据式（5.3.27）和式（5.3.29），得到 IBNR 准备金的计算结果，如表 5－55 所示。

表 5-55　　预算 IBNR 方法下的 IBNR 准备金的估计结果

事故年	(5) 2008	(4) 2007	(3) 2006	(2) 2005	(1) 2004
已赚保费 *EP*	7 450	6 583	5 598	5 089	4 586
赔付率 λ	87%	87%	87%	87%	87%
期望最终赔款 Bult	6 482	5 727	4 870	4 427	3 990
p'	0.2713	0.1346	0.0794	0.0318	0
IBNR 准备金	1 759	771	387	141	0

若已知已报案未决赔款准备金 *RV*，可根据上述计算的 IBNR 准备金来修正最终赔款额的估计值，进而得到未决赔款准备金，如表 5-56 所示。

最终赔款：$\hat{UL} = RV + PC + \text{IBNR} = RC + \text{IBNR}$　　(5.3.30)

未决赔款准备金：$CV = \hat{UL} - PC = \text{IBNR} + RV$　　(5.3.31)

表 5-56　　未决赔款准备金和最终赔款的估计值

事故年	(5) 2008	(4) 2007	(3) 2006	(2) 2005	(1) 2004
RV	3 600	2 539	1 500	799	380
IBNR 准备金	1 759	771	387	141	0
PC	1 730	2 865	3 235	3 400	3 337
$\hat{UL}$	7 089	6 175	5 122	4 340	3 717
CV	5 359	3 310	1 887	940	380

最终赔款总额 $\sum \hat{UL} = 7\ 089 + 6\ 175 + 5\ 122 + 4\ 340 + 3\ 717 = 26\ 443$，各事故年总的已付赔款为 $\sum PC = 3\ 700 + 3\ 400 + \cdots + 1\ 730 = 14\ 567$，未决赔款准备金 $CV = 5\ 359 + 3\ 310 + 1\ 887 + 940 + 380 = 11\ 876$。

2. 基于已付赔款数据的预算 IBNR 方法。基于已付赔款数据的预算 IBNR方法，称为 BF-PC 方法。仍以表 5-8 累积已付赔款额流量三角形为例，已赚保费采用表 5-53 中的数据，累积进展因子采用表 5-12 中原始加权平均法的计算结果，假设期望最终赔付率 λ 仍统一为 87%，则未决赔款准备金及最终赔款的估计结果如表 5-57 所示。

表 5-57　　未决赔款准备金及最终赔款的估计

事故年	(5) 2008	(4) 2007	(3) 2006	(2) 2005	(1) 2004
已赚保费 *EP*	7 450	6 583	5 598	5 089	4 586
赔付率 λ	87%	87%	87%	87%	87%
期望最终赔款 Bult	6 482	5 727	4 870	4 427	3 990

续表

事故年	(5) 2008	(4) 2007	(3) 2006	(2) 2005	(1) 2004
p	0.7367	0.5014	0.3428	0.1895	0.0981
PC	1 730	2 865	3 235	3 400	3 337
未决赔款准备金 CV	4 775	2 872	1 669	839	391
$\hat{UL}$	6 505	5 737	4 904	4 239	3 728

总的未决赔款准备金 $\sum CV = 4\ 775 + 2\ 872 + 1\ 669 + 839 + 391 = 10\ 546$，各事故年总的已付赔款为 $\sum PC = 3\ 700 + 3\ 400 + \cdots + 1\ 730 = 14\ 567$，最终赔款的估计值 $= \sum CV + \sum PC = 10\ 546 + 14\ 567 = 25\ 113$。

5.3.6 已发生已报案未决赔款准备金评估

已发生已报案未决赔款准备金是未决赔款准备金的主要组成部分，在保险公司里，已报案未决赔款准备金的计提主要是理赔人员的工作。理赔人员必须熟悉保险业务的具体流程并具备一定的专业知识，及时了解法规的变更，社会、经济等因素变化对已报案赔款的影响。其主要评估方法有两种：一种是逐案评估法，另一种是案均赔款法，在某些特殊情况下也可以采用表定法等备用方法。

1. 逐案评估法。逐案评估法是指在保险事故发生之后，由经验丰富的理赔人员对每一个已报案未决赔款的赔付金额进行逐案估计，除考虑赔案的自身特点，还需考虑经济环境、法律环境等的变化。

一般而言，逐案评估法适用于赔款固定、历史赔付经验少、赔案数目较少的特别险种和赔款金额变动较大的短尾业务。比如，企业财产保险等商业险种，风险特征相对独特，风险同质性低，相似保单数量少，历史赔付经验少，评估此类险种的未决赔款准备金更多地依赖于逐案评估法。而对于类似于机动车保险等大部分个人保险业务，由于赔案数目较多，风险同质性较高，赔款额较小，则不适用于逐案评估法。

由于逐案评估法较多地依赖于理赔人员的主观判断，估计误差较大，因此特别不适用长尾业务的险种。而且，在应用该方法评估未决赔款准备金时，还应注意以下问题：

(1) 避免逐案估计的主观性。理赔人员在对已报案赔案进行评估时，会受到其自身对保险责任范围、经济社会环境、法规环境等各因素判断的影响，甚至会受到自身情绪的影响，主观性较强。因而，理赔人员在进行评估时，应尽量客观地对赔案进行估计。公司也可以对相关的理赔人员进行技能培训，或通过聘请保险公估人等方式尽可能地避免逐案评估方法的

主观性。

（2）对逐案评估结果的更新。采用逐案评估法对已报案赔案进行预估时，可以采用以下几种方式更新预估损失：

① 即时更新。对已报案赔款完成预估之后，在获取最新信息时，立即对初始估损金额进行更新。

② 定期更新。在固定的评估时间点，如月末、年底等，通过对尚未赔付的各项赔案进行复查，根据最新信息对估损金额进行更新。

③ 预付赔款更新。在支付预付赔款时相应扣减期初估损金额，但总的赔付金额保持不变。

④ 结案时更新。在结案前对赔案的估损金额保持不变，结案时根据实际赔付金额和直接理赔费用予以记录。

保险公司应优先选用前两种更新方式对估损金额进行更新。

2. *案均赔款法*。对于大部分个人保险业务，由于赔案数目较多，风险同质性较高，赔款额较小，不适用于逐案评估法，此时可采用案均赔款法，即设定每件赔案的赔款金额是相同的，再乘以已报案赔款次数，该乘积即为已报案未决赔款准备金。保险公司可以根据实际情况，对每个险种的案均赔款进行设定，也可以在每个险种内部根据赔案类型进行设定。

总体来说，案均赔款法适用于下列业务：（1）理赔金额小但能快速决定赔款的业务；（2）赔案数目多但赔付模式相对稳定的险种；（3）赔案同质性较高的险种；（4）近期已报案赔付的信息不足，不能设置合理的已报案未决赔款准备金的业务。

3. *表定法*。表定法主要是根据生命表、伤残表、伤愈率表等精算分析工具，对未来可能发生的赔款进行贴现计算来评估已报案未决赔款准备金。主要适用于那些赔付金额确定但赔付时间不确定的赔案，如伤残给付、住院补贴给付、误工费用给付等，常见于短期健康险和意外伤害险等业务。

根据历史经验数据，按照伤残类型、伤残程度、性别、年龄、保险事故类型等因素可以预先设定赔款估算表。保险事故发生之后，根据赔款估算表，综合考虑将来的通货膨胀以及个案的特殊性，逐案评估已发生已报案未决赔款准备金。

5.3.7　意外险的示例

已知某保险公司 ABC，承保意外险，给定已报案赔款数据信息如表 5－58所示，并假设预期赔付率为 0.80，以及假设 48 个月之后没有赔款进展发生。

表 5－58

事故年	已赚保费	进展年			
		0	1	2	3
2005	20 900	5 335	10 670	15 510	17 820
2006	22 000	5 665	11 330	16 390	—
2007	23 100	5 940	11 880	—	—
2008	24 200	7 920	—	—	—

1. 采用链梯法，简单平均值法计算链梯因子，计算在 2008 年 12 月 31 日 ABC 公司应提取的 IBNR 准备金。

步骤一：获取各事故年在各进展年的进展因子，选定进展因子并得到累积进展因子，如表 5－59 所示。

表 5－59

事故年	进展年		
	0～1	1～2	2～3
2005	2.0000	1.4536	1.1489
2006	2.0000	1.4466	—
2007	2.0000	—	—
进展因子	2.0000	1.4501	1.1489
累积进展因子	3.3320	1.6660	1.1489

步骤二：预测各事故年的最终损失，如表 5－60 所示。

表 5－60

事故年	累积进展因子	2008 年末累积已报案赔款	最终损失预测值
2005	1	17 820	17 820
2006	1.1489	16 390	18 830
2007	1.666	11 880	19 792
2008	3.332	7 920	26 389

表 5－60 中，由于已经假设 48 个月后没有赔款发生，所以事故年 2005 的累积进展因子为 1。所以在 2008 年末预测的最终损失为 17 820＋18 830＋19 792＋26 389＝82 831。各事故年在 2008 年的累积已报案赔款的总和为 17 820＋16 390＋11 880＋7 920＝54 010。因此，2008 年末 ABC 应计提的 IBNR 准备金＝82 831－54 010＝28 821。

2. 采用预算 IBNR 方法计算事故年 2008 年在 2008 年 12 月 31 日的

IBNR准备金。

步骤一：根据期望赔付率和已赚保费，由式5.3.27计算期望最终损失Bult，如表5－61所示。

表5－61

事故年	2008	2007	2006	2005
已赚保费	24 200	23 100	22 000	20 900
赔付率	0.8	0.8	0.8	0.8
期望最终损失 Bult	19 360	18 480	17 600	16 720

步骤二：根据式（5.3.26）计算各事故年的因子p'，如表5－62所示。

表5－62

事故年	2008	2007	2006	2005
累积进展因子	3.332	1.666	1.1489	1
p'	0.6999	0.3998	0.1296	0

步骤三：根据估计的期望最终损失Bult和p'，由式（5.3.29）预测IBNR准备金，如表5－63所示。

表5－63

事故年	2008	2007	2006	2005
期望最终损失 Bult	19 360	18 480	17 600	16 720
p'	0.6999	0.3998	0.1296	0
IBNR 准备金	13 550	7 388	2 281	0

所以，根据预算IBNR方法，2008年末应提取的IBNR准备金为：13 550＋7 388＋2 281＝23 219。

§5.4　保费不足准备金与理赔费用准备金评估

5.4.1　保费不足准备金及充足性检验

未赚保费责任准备金是对未来可能发生的赔付的估计，但实际的赔付可能大于所提取的未赚保费责任准备金，根据《保险公司非寿险业务准备金管理办法实施细则》第六条的规定，保险公司在评估未到期责任准备金时，要对其充足性进行测试。以决定是否需要计提保费不足准备金。该细

则还规定，未到期责任准备金的提取金额应不低于以下两者中的较大者：

（1）预期未来发生的赔款与费用扣除相关投资收入之后的余额；

（2）在责任准备金评估日假设所有保单退保时的退保金额。

当未到期责任准备金不足时，应提取保费不足准备金，提取的保费不足准备金应能弥补未到期责任准备金和上述两者较大者之间的差额。以下给出未到期责任准备金充足性测试的一个例子，如表 5－64 所示。

表 5－64　　一个充足性测试的例子

未到期责任准备金	(1)	100
预期终极赔付率	(2)	77%
预期维持费用率	(3)	28.32%
预期投资收益率	(4)	1.6%
预期赔款	(5) = (1) × (2)	77
预期维持费用	(6) = (1) × (3)	28.32
预期投资收入	(7) = (1) × (4) / 2	0.8
差额	(8) = (1) − (5) − (6) + (7)	−4.52

上例中，预期赔款＋预期维持费用－预期投资收入＝104.52，假设退保时的退保金额为 90，则原来提取的未到期责任准备金介于这两个数值之间，需要计提保费不足准备金，金额为 4.52。

5.4.2　理赔费用准备金评估

对于保险事故，保险公司除应支付保险合同约定的赔偿外，还应支付结案过程中所发生的理赔费用。理赔费用准备金便是保险公司对已发生的保险事故的相应的理赔费用所作的资金准备。理赔费用一般可以划分为直接理赔费用和间接理赔费用。直接理赔费用指直接发生于具体赔案的费用，如专家费、律师费、损失检验费等，这些费用与赔案直接相关，可以分摊到具体赔案，在北美国家，通常将这部分费用称之为可分摊费用（Allocated Loss Adjustment Expenses，ALAE）；间接理赔费用指不是直接发生于具体赔案的费用，如理赔部门工作人员的薪资、办公费用等，这些费用不能分摊到具体赔案，也称之为不可分摊费用（Unallocated Loss Adjustment Expenses，ULAE）。

当理赔费用模式与赔案赔款模式具有相同规律时，可将理赔费用与赔款一起确认，具体做法是将所有的已付理赔费用加入到赔款中，对应于已报案未支付的理赔费用加入到已报案未决赔款准备金中。当理赔费用模式与赔案赔款模式差别较大时，尤其是对具有较大法律诉讼费用的责任险业务，需要对理赔费用单独考虑。

保险公司应分别计提直接理赔费用准备金和间接理赔费用准备金。

1. 直接理赔费用准备金的评估。直接理赔费用准备金与具体赔案对应，用于评估未决赔款准备金的方法也同样适用于评估直接理赔费用准备金。直接理赔费用常用的评估方法有两种：已付 ALAE 链梯法和已付 ALAE 与已付赔款比率法。以下将分别介绍。

（1）已付 ALAE 链梯法。估计直接理赔费用的已付 ALAE 链梯法与估计未决赔款准备金的链梯法类似，以下举例说明已付 ALAE 链梯法的应用。

表 5－65 给出直接理赔费用数据，对应于表 5－8 中的已付赔款额数据。

表 5－65　　累积直接理赔费用流量三角形　　单位：千元

事故年	进展年					最终值
	0	1	2	3	4	
（1）2004	31	72	140	210	261	322
（2）2005	36	85	163	249		
（3）2006	40	99	200			
（4）2007	51	121				
（5）2008	53					

类似于 5. 3. 1 所介绍的链梯法，我们计算表 5－65 累积直接理赔费用流量三角形的最终累积进展因子，以原始加权法为例，计算结果如表 5－66 所示。

表 5－66　　已付 ALAE 逐年进展因子和最终累积进展因子

事故年	进展年				
	0～1	1～2	2～3	3～4	4～∞
逐年进展因子	2. 3861	1. 9648	1. 5149	1. 2429	1. 2337
最终累积进展因子	10. 8902	4. 564	2. 3229	1. 5334	1. 2337

根据估计的最终累积进展因子可以得到最终 ALAE 的估计值，进而得到 ALAE 准备金的估计值，计算结果如表 5－67 所示。

表 5－67　　最终 ALAE 和 ALAE 准备金的估计值

事故年	已付 ALAE	最终累积进展因子	估计的最终 ALAE	估计的 ALAE 准备金
（1）2004	261	1. 2337	322	61
（2）2005	249	1. 5334	382	133
（3）2006	200	2. 3229	465	265

续表

事故年	已付 ALAE	最终累积进展因子	估计的最终 ALAE	估计的 ALAE 准备金
(4) 2007	121	4.564	552	431
(5) 2008	53	10.8902	577	524
总计	884	—	2 298	1 414

其中，估计的 ALAE 准备金 = 最终 ALAE - 已付 ALAE，如事故年 2006，估计的 ALAE 准备金 = 465 - 200 = 265（千元）。ALAE 准备金的总额为：61 + 133 + ⋯ + 524 = 1 414（千元）。

已付 ALAE 链梯法的优点是简单、直观，适用于早期事故年直接理赔费用准备金的评估。但初始费用的剧烈波动可能严重影响评估结果的准确性，同时，该方法也忽略了直接理赔费用和赔款之间的关系。

（2）已付 ALAE 与已付赔款比率法。该方法假设直接理赔费用与相应的已付赔款之间存在着一种相对稳定的比例关系，该比例关系的发展规律在未来也将持续，将链梯法应用于该比例数据所构成的流量三角形中，可以得到直接理赔费用与已付赔款的最终比例，将该比例乘以估计的最终损失额，即可得到估计的最终直接理赔费用，进而得到直接理赔费用准备金。

以下通过一个例子来具体说明已付 ALAE 与已付赔款比率法是如何评估直接理赔费用准备金。直接理赔费用仍采用表 5 - 65 中的数据，各事故年的已付赔款数据和最终赔款的估计值见表 5 - 68，其中各事故年的最终赔款是按原始加权平均法下的链梯法计算得到的。

表 5 - 68　　最终赔款的估计值

事故年	进展年					估计的最终赔款
	0	1	2	3	4	
(1) 2004	1 003	1 855	2 413	2 999	3 337	3 700
(2) 2005	1 120	2 113	2 776	3 400	—	4 195
(3) 2006	1 275	2 423	3 235	—	—	4 922
(4) 2007	1 489	2 865	—	—	—	5 746
(5) 2008	1 730	—	—	—	—	6 571

将表 5 - 65 与表 5 - 68 中对应元素相除，得到各事故年在各进展年的已付 ALAE 与已付赔款比率，如表 5 - 69 所示。

表 5－69　　已付 ALAE 与已付赔款比率流量三角形

事故年	进展年					估计的最终赔款
	0	1	2	3	4	
(1) 2004	0.0309	0.0388	0.058	0.07	0.0782	0.087
(2) 2005	0.0321	0.0402	0.0587	0.0732	—	—
(3) 2006	0.0314	0.0409	0.0618	—	—	—
(4) 2007	0.0343	0.0422	—	—	—	—
(5) 2008	0.0306	—	—	—	—	—

基于表 5－69，应用链梯法，以原始加权平均法为例，得到各事故年在各进展年的进展因子及最终进展因子，并得到已付 ALAE 与已付赔款最终比率的估计值，计算结果如表 5－70 所示。

表 5－70　　已付 ALAE 与已付赔款最终比率的估计值

事故年	2008	2007	2006	2005	2004
进展年	0～1	1～2	2～3	3～4	4～∞
逐年进展因子	1.2595	1.4887	1.2271	1.1171	1.1125
最终累积进展因子	2.8594	2.2703	1.525	1.2428	1.1125
已付 ALAE 与已付赔款比率	0.0306	0.0422	0.0618	0.0732	0.0782
已付 ALAE 与已付赔款最终比率	0.0875	0.0958	0.0942	0.091	0.087

根据已付 ALAE 与已付赔款最终比率的估计值，可预测最终直接理赔费用及直接理赔费用准备金，计算结果如表 5－71 所示。

表 5－71　　最终直接理赔费用及直接理赔费用准备金的估计值

事故年	2008	2007	2006	2005	2004	合　计
最终赔款	6 571	5 746	4 922	4 195	3 700	25 134
最终比率	0.0875	0.0958	0.0942	0.091	0.087	—
已付 ALAE	53	121	200	249	261	884
最终 ALAE	575	550	464	382	322	2 293
ALAE 准备金	522	429	264	133	61	1 409

例如，事故年 2006 的最终 ALAE ＝最终赔款 × 最终比率 ＝4 922 × 0.0942 ＝464（千元）。总的 ALAE 准备金 ＝522 ＋429 ＋… ＋61 ＝1 409（千元）。

已付 ALAE 与已付赔款比率法的优点是体现了直接理赔费用 ALAE 与赔款之间的关系，简单易行。缺点是过分依赖对最终赔款的估计，最终赔

款的任何高估或低估都会对直接理赔费用准备金的评估结果产生影响。此外，该方法假设直接理赔费用与相应的已付赔款之间存在着一种相对稳定的比例关系，但在某种情况下该假设不能满足，比如，保险公司理赔策略的重大变化可能会导致诉讼费用等直接理赔费用大幅提高。同样地，初始费用的剧烈波动也可能会严重影响评估结果的准确性。

2. 间接理赔费用准备金的评估。间接理赔费用与保险业务流程相关，不能直接分摊到具体的赔案当中，所以，理赔人员在评估间接理赔费用准备金时，必须熟悉保险公司的业务流程。在特定情况下，需要分业务类型来评估间接理赔费用准备金，比如，根据各险种的业务规模加权评估。

一般来说，保险公司记录间接理赔费用没有直接理赔费用那么详细，因此，理赔人员需要通过一定的方法将其分配到各个险种，之后就可以进行准备金评估工作了。在分配过程中，准备金评估人员应该考虑导致费用发生的各个因素，比如，各个险种在当年发生的案件数、已决案件数、未决案件数、赔款金额等。准备金评估人员应当熟悉间接理赔费用在各个险种之间的分配方式及其变化情况。现举例说明：

假设以前几个日历年度的已决赔款和对应的间接理赔费用如表 5 – 72 所示。

表 5 – 72　　已决赔款和对应的间接理赔费用　　单位：千元

日历年度	已决赔款（1）	间接理赔费用（2）	每百元已决赔款所对应的 ULAE(3) = (2) ÷ (1) × 100
2002	17 300	9 500	54.91
2003	50 900	13 659	26.83
2004	111 900	19 878	17.76
2005	220 730	29 020	13.15
2006	397 208	64 931	16.35
2007	522 378	78 934	15.11
2008	695 676	138 454	19.9
合计	2 016 092	354 376	17.58

从表 5 – 72 可以看出，间接理赔费用与已决赔款的经验比率为 17.58%，即每发生 100 元的已决赔款对应的间接理赔费用为 17.58 元。需要注意的是，每个日历年度的已决赔款和间接理赔费用，是由当年新赔案和往年未决赔案所共同引起的。

间接理赔费用在整个理赔过程中都会发生，在间接理赔费用评估过程中，一般假设间接理赔费用在赔案报告时发生 50%，其余 50% 在结案时发生。对于已报告的赔案，50% 的间接理赔费用已经发生，因而只有 50% 的

已报案未决赔款准备金与未来的间接理赔费用有关；对于未报告的赔案，还未产生间接理赔费用 ULAE，因而 100% 的 IBNR 准备金都与未来的间接理赔费用有关。用公式表示为：

$$ULAE\ 准备金 = r \cdot (50\% \times RV + IBNR) \tag{5.4.1}$$

其中 r—ULAE 与已决赔款的经验比率。

当然，在实际评估间接理赔费用的过程中，我们可以根据公司的实际情况采用其他比率。例如，假设间接理赔费用在立案时发生 40%，结案时发生 60%，则间接理赔费用准备金为：

$$ULAE\ 准备金 = r \cdot (60\% \times RV + IBNR) \tag{5.4.2}$$

需要指出的是，一般上述公式的 IBNR 指狭义 IBNR 准备金，即纯 IBNR。在实务中，很多保险公司都按 100% 的已报案未决赔款准备金来计算间接理赔费用准备金：

$$ULAE\ 准备金 = r \cdot (100\% \times RV + IBNR) \tag{5.4.3}$$

上述方法假设赔案发生的时间不会影响 ULAE 与已决赔款的比例关系，同时假设间接理赔费用与赔款支付的时间和速度基本相同。如果保险公司的大多数业务已经稳定经营了多年以上，且通货膨胀较小，则该方法的适用性还是很好的，因此该方法适用于业务稳定的短尾业务，一般认为是从报案到结案在 5 年内完成，赔案报告模式、赔付模式相对稳定的业务，且在通货膨胀较低的情况下。当上述假设条件不满足时，需探求新的间接理赔费用准备金计算方法，如基于操作过程的 Johnson 评估法，这里就不介绍，感兴趣的同学可以参阅谢志刚、周晶晗主编的《非寿险责任准备金评估》第五章第六节相关内容。

§5.5 未决赔款准备金评估的合理性检验

我们已经介绍了多种未决赔款准备金的评估方法，每种方法所采用的信息都有一定的差异，所得到的未决赔款准备金的评估结果也都不一样，因此，应从不同的角度对评估结果进行检验、选择和监控。

5.5.1 已发生已报案未决赔款准备金充足性检验

在 5.3 节中我们提到，报案年准备金进展法可以检测已发生已报案未决赔款准备金的充足性。在报案年准备金进展法中，已决赔款和已发生已报案未决赔款准备金数据都是按报案年统计，在每一个报案年结束之后，已报案案件数的统计结果都不再发生变化，因为新发生的案件都将被统计到下一个报案年。

报案年准备金进展法的基本思想是将已发生已报案未决赔款准备金在下

一个进展年分成两部分：一部分为未来的赔款实际支付，另一部分结转为下一个进展年的重估已发生已报案未决赔款准备金。如表5－73和表5－74所示，报案年2006在进展年0的已发生已报案未决赔款准备金为41 800（千元），其中在2007年支付了17 049（千元），另一部分为报案年2006年在2007年末的重估已发生已报案未决赔款准备金28 789（千元）。注意，2007年支付的金额与重估的已发生已报案未决赔款准备金之和常不等于报案年2006的已发生已报案未决赔款准备金（17 049＋28 789＞41 800）。

表5－73　基于报案年的已报案未决赔款准备金　单位：千元

报案年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	46 757	31 940	18 830	9 600	5 000
(2) 2005	53 402	36 607	21 220	11 400	—
(3) 2006	41 800	28 789	15 765	—	—
(4) 2007	40 338	28 262	—	—	—
(5) 2008	47 589	—	—	—	—

表5－74　基于报案年的增量已付赔款　单位：千元

报案年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	29 989	16 101	14 140	8 200	5 919
(2) 2005	29 420	18 049	15 999	10 801	—
(3) 2006	26 598	17 049	13 178	—	—
(4) 2007	24 981	15 231	—	—	—
(5) 2008	27 545	—	—	—	—

将表5－74的数据除以表5－73对应前一列的数据，得到各个报案年在各进展年的准备金支付率，以简单平均法为例，结果如表5－75所示。

表5－75　基于报案年的准备金支付率

报案年	进展年			
	1	2	3	4
(1) 2004	0.3444	0.4427	0.4355	0.6166
(2) 2005	0.3380	0.4370	0.5090	—
(3) 2006	0.4079	0.4577	—	—
(4) 2007	0.3776	—	—	—
简单平均法	0.3670	0.4458	0.4723	0.6166

例如，报案年2006在进展年1的准备金支付率 $=\frac{17\ 049}{41\ 800}=0.4079$。

假设准备金评估人员根据表5－75的平均值，结合自己的经验和行业数据，确定未来的准备金支付率为表5－76所示。

表5－76 未来准备金支付率的估计值

报案年	进展年				
	1	2	3	4	最终值
(1) 2004	0.3444	0.4427	0.4355	0.6166	1.0000
(2) 2005	0.3380	0.4370	0.5090	0.5000	1.0000
(3) 2006	0.4079	0.4577	0.5000	0.5000	1.0000
(4) 2007	0.3776	0.5000	0.5000	0.5000	1.0000
(5) 2008	0.3800	0.5000	0.5000	0.5000	1.0000

同样的，可以建立已发生已报案未决赔款准备金的剩余额与前一年末的已发生已报案未决赔款准备金比率，即已发生已报案未决赔款准备金结转率的流量三角形，如表5－77所示。

表5－77 基于报案年的已发生已报案未决赔款准备金结转率

报案年	进展年			
	1	2	3	4
(1) 2004	0.6831	0.5895	0.5098	0.5208
(2) 2005	0.6855	0.5797	0.5372	—
(3) 2006	0.6887	0.5476	—	—
(4) 2007	0.7006	—	—	—
简单平均法	0.6895	0.5723	0.5235	0.5208

例如，报案年2006在进展年1的准备金结转率 $=\frac{28\ 789}{41\ 800}=0.6887$。

假设准备金评估人员根据表5－77的平均值，结合自己的经验和行业数据，确定未来的准备金结转率为表5－78所示。

表5－78 未来准备金结转率的估计值

报案年	进展年				
	1	2	3	4	最终值
(1) 2004	0.6831	0.5895	0.5098	0.5208	0.0000
(2) 2005	0.6855	0.5797	0.5372	0.6000	0.0000
(3) 2006	0.6887	0.5476	0.5300	0.6000	0.0000
(4) 2007	0.7006	0.6350	0.5300	0.6000	0.0000
(5) 2008	0.7200	0.6350	0.5300	0.6000	0.00006

将表 5－77 与表 5－78 相应的元素的相加，得到表 5－79 准备金进展比率的估计，该表的数据反映了已发生已报案未决赔款准备金的发展情况。

表 5－79　　准备金进展比率的估计

报案年	进展年				
	1	2	3	4	最终值
(1) 2004	1.0275	1.0322	0.9453	1.1374	1.0000
(2) 2005	1.0235	1.0167	1.0462	1.1000	1.0000
(3) 2006	1.0966	1.0053	1.0300	1.1000	1.0000
(4) 2007	1.0782	1.1350	1.0300	1.1000	1.0000
(5) 2008	1.1000	1.1350	1.0300	1.1000	1.0000

根据表 5－78 确定的准备金结转率，可以计算各报案年已发生已报案未决赔款准备金的估计值。如表 5－80 所示。

表 5－80　　各报案年已发生已报案未决赔款准备金的估计

报案年	进展年					
	0	1	2	3	4	最终值
(1) 2004	46 757	31 940	18 830	9 600	5 000	0
(2) 2005	53 402	36 607	21 220	11 400	6 840	0
(3) 2006	41 800	28 789	15 765	8 355	5 013	0
(4) 2007	40 338	28 262	17 946	9 511	5 707	0
(5) 2008	47 589	34 264	21 758	11 532	6 919	0

例如，报案年 2006 年在进展年 3 的未决赔款准备金 = 15 765 × 0.53 = 8 355。

在表 5－80 各报案年已发生已报案未决赔款准备金的估计值的基础上，根据表 5－76 未来准备金支付率的选定值，可以得到各报案年在未来的已决赔款的估计值，计算结果如表 5－81 所示。

表 5－81　　各报案年已决赔款的估计值

报案年	进展年					
	0	1	2	3	4	最终值
(1) 2004	29 989	16 101	14 140	8 200	5 919	5 000
(2) 2005	29 420	18 049	15 999	10 801	5 700	6 840
(3) 2006	26 598	17 049	13 178	7 883	4 178	5 013
(4) 2007	24 981	15 231	14 131	8 973	4 756	5 707
(5) 2008	27 545	18 084	17 132	10 879	5 766	6 919

例如，报案年2006年在进展年3的已决赔款＝15 765×0.50＝7 883。

根据表5－81的估计值，我们可以计算各报案年未来的累积已决赔款，计算结果如表5－82所示。

表5－82　　各报案年未来累积已决赔款的估计值

报案年	进展年					
	0	1	2	3	4	最终值
(1) 2004	29 989	46 090	60 230	68 430	74 349	79 349
(2) 2005	29 420	47 469	63 468	74 269	79 969	86 809
(3) 2006	26 598	43 647	56 825	64 708	68 886	73 899
(4) 2007	24 981	40 212	54 343	63 316	68 072	73 779
(5) 2008	27 545	45 629	62 761	73 640	79 406	86 325

应用前面的各种估计结果，可以对已发生已报案未决赔款准备金的充足率进行评价。结果如表5－83所示。

表5－83　　已发生已报案未决赔款准备金的充足率

报案年	最终损失 (1)	累积已决赔款 (2)	未决赔款 (3)＝(1)－(2)	已发生已报案未决赔款准备金 (4)	已发生已报案未决赔款准备金差额(5)＝(3)－(4)	已发生已报案未决赔款准备金充足率 (6)＝(4)/(3)
(1) 2004	79 349	74 349	5 000	5 000	0	100.00%
(2) 2005	86 809	74 269	12 540	11 400	1 140	90.91%
(3) 2006	73 899	56 825	17 074	15 765	1 309	92.33%
(4) 2007	73 779	40 212	33 567	28 262	5 305	84.20%
(5) 2008	86 325	27 545	58 780	47 589	11 191	80.96%

从表5－83可以看出，报案年2008的已发生已报案未决赔款准备金充足率为80.96%，有大约19%的不足；报案年2007的已发生已报案未决赔款准备金充足率为84.20%，有大约15%的不足；报案年2006的已发生已报案未决赔款准备金充足率为92.33%，有大约7%的不足；报案年2005的已发生已报案未决赔款准备金充足率为90.91%，有大约9%的不足；而报案年2004的已发生已报案未决赔款准备金充足率达到了100%。

5.5.2　未决赔款准备金评估结果的选择

前面所介绍了各种未决赔款准备金的评估方法，每种方法都采用了部分信息，这些所采用的信息都有一定的差异，因此所得到的未决赔款准备

金的评估结果也不一样。为了提高未决赔款准备金评估结果的准确性，需要采用一些方法对各种方法计算的未决赔款准备金结果选择。

对于前述假设的数据，所介绍的几种准备金评估方法得到的最终损失和未决赔款准备金的评估结果如表 5 - 84 和表 5 - 85 所示。

表 5 - 84　　各种评估方法下最终损失的估计值

事故年	基于已付赔款数据的链梯法	基于已报案赔款数据的链梯法	已付赔款案均法	已报案赔款案均法	准备金进展法	基于已报案赔款数据的预算IBNR 方法	基于已付赔款数据的预算IBNR 方法	平均值	选定值
(1)2004	3 700	3 717	3 700	3 717	3 337	3 717	3 728	3 659	3 717
(2)2005	4 195	4 337	4 194	4 337	3 850	4 340	4 239	4 213	4 337
(3)2006	4 922	5 143	4 923	5 141	5 042	5 122	4 904	5 028	5 141
(4)2007	5 746	6 245	5 743	6 240	5 574	6 175	5 737	5 923	6 240
(5)2008	6 571	7 315	6 560	7 303	6 550	7 089	6 505	6 842	7 089

表 5 - 85　　各种评估方法下未决赔款准备金的估计值

事故年	基于已付赔款数据的链梯法	基于已报案赔款数据的链梯法	已付赔款案均法	已报案赔款案均法	准备金进展法	基于已报案赔款数据的预算IBNR 方法	基于已付赔款数据的预算IBNR 方法	平均值	选定值
(1)2004	363	380	363	380	0	380	391	322	380
(2)2005	795	937	794	937	450	940	839	813	937
(3)2006	1 687	1 908	1 688	1 906	1 807	1 887	1 669	1 793	1 906
(4)2007	2 881	3 380	2 878	3 375	2 709	3 310	2 872	3 058	3 375
(5)2008	4 841	5 585	4 830	5 573	4 820	5 359	4 775	5 112	5 359

在表 5 - 84 中，假设准备金评估人员经过综合考虑，对最终损失的选定值如表中最后一列所示。其中最近一个事故年 2008，选择基于已报案赔款数据的预算 IBNR 方法的评估结果，对于之前的事故年，则选择基于已报案赔款数据的链梯法的评估结果。

根据所选择的最终损失，将已知的已决赔款数据（表 5 - 8）和已报案赔款数据（表 5 - 16），除以所选择的最终损失，可以得到已决赔款和已报案赔款占最终损失的比例，如表 5 - 86 和表 5 - 87 所示。根据这些百分比流量三角形，可以分析是否存在异常现象。

表 5 - 86　　已决赔款占最终损失的比例

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	26.98%	49.91%	64.92%	80.68%	89.78%
(2) 2005	25.82%	48.72%	64.01%	78.40%	—
(3) 2006	24.80%	47.13%	62.93%	—	—
(4) 2007	23.86%	45.91%	—	—	—
(5) 2008	24.40%	—	—	—	—

表 5 - 87　　已报案赔款占最终损失的比例

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	74.66%	87.57%	92.57%	96.83%	100.00%
(2) 2005	74.24%	86.97%	91.63%	96.82%	—
(3) 2006	71.06%	85.45%	92.10%	—	—
(4) 2007	72.40%	86.60%	—	—	—
(5) 2008	75.19%	—	—	—	—

同样地，可以用已发生已报案未决赔款准备金（表 5 - 15）除以所选择的最终损失，可以得到已发生已报案未决赔款准备金占最终损失的比例，如表 5 - 88 所示。实际上，将表 5 - 87 中的元素减去表 5 - 86 中的相应元素，也可以得到已发生已报案未决赔款准备金占最终损失的比例。

表 5 - 88　　已发生已报案未决赔款准备金占最终损失

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	47.67%	37.66%	27.66%	16.14%	10.22%
(2) 2005	48.42%	38.25%	27.62%	18.42%	—
(3) 2006	46.26%	38.32%	29.18%	—	—
(4) 2007	48.54%	40.69%	—	—	—
(5) 2008	50.78%	—	—	—	—

将各事故年选定的最终损失值减去各事故年的已决赔款，可以得到各事故年未决赔款准备金需求量。将各事故年未决赔款准备金需求量除以最终损失，可以得到未决赔款准备金需求量占最终损失的比例，类似，将 1 减去表 5 - 86 中的元素也可以得到未决赔款准备金需求量占最终损失的比例。根据此比例三角形，可以评价最终损失的评估值是否合理。结果如表

5－89 所示。

表 5－89　　未决赔款准备金需求量占最终损失的比例

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	73.02%	50.09%	35.08%	19.32%	10.22%
(2) 2005	74.18%	51.28%	35.99%	21.60%	—
(3) 2006	75.20%	52.87%	37.07%	—	—
(4) 2007	76.14%	54.09%	—	—	—
(5) 2008	75.60%	—	—	—	—

一般情况下，未决赔款准备金需求量与已发生已报案未决赔款准备金的百分比是稳定的，因此，分析此比例也是有意义的。将各事故年在各进展年的未决赔款准备金需求量除以各事故年在各进展年已知的已发生已报案未决赔款准备金，可以得到该比例流量三角形，实际上，将表 5－89 中的元素除以 5－88 中的相应元素，也可以得到此比例。计算结果如表 5－90 所示。

表 5－90　未决赔款准备金需求量与已发生已报案未决赔款准备金的比例

事故年	进展年				
	0	1	2	3	4
(1) 2004	153.16%	133.00%	126.85%	119.67%	100.00%
(2) 2005	153.19%	134.06%	130.30%	117.27%	—
(3) 2006	162.57%	137.97%	127.07%	—	—
(4) 2007	156.85%	132.93%	—	—	—
(5) 2008	148.86%	—	—	—	—

根据未决赔款准备金与最终损失的比例，可以分析最终损失的选取是否合理，同样地，将最终损失与已赚保费进行分析，也可以发现最终损失的选取是否存在问题。表 5－91，将表 5－84 中选定的最终损失值与已赚保费相除，得到赔付率的估计值，其中已赚保费采用表 5－53 中的数据。

表 5－91　　最终损失与已赚保费的分析

事故年	选定的最终损失	已赚保费	赔付率
(1) 2004	3 717	4 586	81.05%
(2) 2005	4 337	5 089	85.22%
(3) 2006	5 141	5 598	91.84%
(4) 2007	6 240	6 583	94.79%
(5) 2008	7 089	7 450	95.15%

从表 5－91 中可以看出，赔付率有升高的趋势，这就要求准备金评估人员分析其原因，以确认是否是由于最终损失选择的不合理或是准备金评估方法的选择所导致的问题。

根据需要，我们还可以分析各事故年的最终案均赔款和最终索赔频率。其中最终案均赔款等于最终损失除以最终的索赔数目估计值，最终索赔频率等于最终的索赔数目除以已赚保费。

通过以上分析可以看出，准备金评估人员应当在成本范围之内，通过尽可能多的分析获取尽可能多的数据和信息，选取合适的准备金评估方法和准备金评估值。

5.5.3　未决赔款准备金评估结果的监控

最终损失的值一旦选定，就可以根据选定的最终损失值来预测各事故年在下一个进展年的赔款情况，将预测结果和下一个时期的实际情况进行对比，就可以发现准备金评估方法的合理性和准确性。如果实际观测到的赔款情况，如已决赔款、已报案赔款等数值，与预测到得情况比较接近，就意味着所选用的评估方法比较合理。否则，就需要分析偏差产生的原因，如果是由于评估方法的选取不合适而导致的，就需要据此选取更加合适的评估方法。

例如，事故年 2008，最终损失的选定值为 7 089（千元），基于已报案赔款的链梯法，以原始加权平均法为例，进展年 0 的终极进展因子为 1.3724（表 5－18），进展年 1 的终极进展因子为 1.154（表 5－18），因此进展年 0 的已报案赔款占最终损失的比例为 $\frac{1}{1.3724}=72.87\%$，进展年 1 的累积已报案赔款占最终损失的比例为 $\frac{1}{1.1556}=86.54\%$，所以事故年 2008 在进展年 1 的已报案赔款的预测值为 $(86.54\%-72.87\%)\times 7\,089=969$（千元）。其他事故年也可以采用同样的方法预测其在下个进展年（2009 年）的已报案赔款，结果如表 5－92 所示。

表 5－92　　各事故年在 2009 年的预测已报案赔款

事故年	选定的最终损失	已报案赔款预测值
(1) 2004	3 717	0
(2) 2005	4 337	138
(3) 2006	5 141	245
(4) 2007	6 240	344
(5) 2008	7 089	969
合计	26 524	1 696

如果选用的准备金评估方法合理的话，2009 年的已报案赔款为 1 696（千元）。如果各事故年在 2009 年的已报案赔款的实际值与 1 696 相差很多的话，那就要分析产生差异的原因，并据此选择选择更加合适的方法，调整预测值。

同样，该方法也适用于对已决赔款、已决直接理赔费用等进行监控。

习　题

1. 假设某公司 2008 年四个季度财产保险的保费收入依次为 500 万元、230 万元、320 万元、100 万元，假定保费收入是均匀分布，请试分别按照下列方法计提 2008 年末的未到期责任准备金。

（1）按季平均法（1/8 法）；

（2）按年平均法（1/2 法）。

2. 假设某公司的消费信贷保险，2009 年 1 月开始承保，第一季度的每月保费收入依次为 1 000 万元、800 万元、600 万元，试用七十八法则计算 2009 年末为该季度计提的未到期责任准备金。

3. 已知某公司的财务报表，2009 年 12 月 31 日，车辆险的财务信息如下：

退保金额	100 000
未到期责任准备金	110 000
预期最终赔付率	78%
维持费用率	26.50%
预期投资收益率	1.80%

问：是否需要计提保费不足责任准备金，如果需要应计提多少？

4. 在题 5－3 的基础上，若退保金额改为 11 万元之后，是否需要计提保费不足准备金，如需要应计提多少？

5. 已知事故年最终赔款和已付赔款链梯进展因子信息如下：

各事故年的最终赔款估计值

事故年	最终赔款
2006	310 000
2007	290 000
2008	300 000

累积进展因子

进展期	0	1	2	3	4
累积进展因子	2.1	1.55	1.25	1.1	1.05

计算各事故年在2009年的赔付额。

6. 对某一类保险业务，已知如下信息：

已发生已报案未决赔款准备金

事故年	0	1	2
2006	41 492	15 887	4 677
2007	43 742	15 651	
2008	43 332		

累计已决赔款

事故年	0	1	2
2005	22 170	56 271	67 405
2006	26 726	62 967	
2007	27 625		

假设进展年2之后无损失发生，使用准备金进展法，并采用简单平均法选取相关比例，

试求：

(1) 进展年1的结转率；

(2) 各事故年的最终损失；

(3) 各事故年的未决赔款准备金及IBNR准备金。

7. 已知某保险公司间接理赔费用（ULAE）与已决赔款的比率为15%。对每一个赔案，假设40%的ULAE发生在立案之初，其余部分发生在结案时。若在2007年底IBNR的估计值为80万元，已发生已报案未决赔款准备金为400万元，则在2007年底应计提多少ULAE准备金？

8. 某保险公司自2005年起所承保的某种业务的有关信息如下：

(1) 2005年已赚保费为495 000元，之后已赚保费以每年以35%的速度增长；

(2) 2005事故年的期望赔付率为68%；

(3) 2008年12月31日，公司准备金精算师认为自公司开始承保该业

务以来，期望赔付率每年增长两个百分点。准备金评估时采用已报案赔款数据，选择的进展因子如下：

进展年	0～1	1～2	2～3	3～4	4～5	5+
进展因子	1.54	1.34	1.126	1.077	1.05	1.02

试使用预算 IBNR 方法计算2008年12月31日的总 IBNR 准备金。

9. 某保险公司的索赔次数和累积赔款额（万元）的数据如下表所示：

事故年	索赔次数	各进展年末累积赔款额			
		0	1	2	3
0	10	30	75	120	140
1	12	45	115	168	—
2	14	60	155	—	—
3	15	65	—	—	—

试用分离法估计未决赔款准备金，其中 λ_h，$h=5, 6, 7$ 用线性回归模型估计。

10. 假设2008日历年已付赔款、已报案赔款、未决赔款准备金如下所示，并假设间接理赔费用在立案时发生50%，试求 ULAE 准备金估计。

2008年底已付赔款	6 000	2008年已发生赔款	8 500
2008年底未决赔款准备金	10 000	2008年 IBNR 准备金	2 200
2007年底未决赔款准备金	7 500	2008年已付 ULAE	260

11. 某保险公司在2005—2008年各事故年在各进展年的累积已决直接理赔费用（ALAE，单位：千元）如下表所示，试用链梯法估计2008年底该保险公司应提取的 ALAE 准备金是多少？采用原始加权平均法选取相关比率，已知进展年3～∞的进展因子为1.01。

事故年	进展年			
	0	1	2	3
2005年（1）	404	950	1 810	2 908
2006年（2）	380	1 020	2 160	—
2007年（3）	350	840	—	—
2008年（4）	215	—	—	—

12. 某保险公司在2005—2008年各事故年在各进展年的累积已决赔款（单位：千元）如下表所示，试用链梯法估计应为事故年2007计提的未决赔款准备金。采用原始加权平均法选取相关比率，已知进展年3～∞的进展因子为1.01。

累积已决赔款

事故年	进展年			
	0	1	2	3
2005年（1）	19 300	37 348	50 295	62 345
2006年（2）	20 500	42 890	62 828	—
2007年（3）	17 000	33 575	—	—
2008年（4）	11 345	—	—	—

13. 已知该某保险公司各事故年的累积直接理赔费用、累积已决赔款分别如题10、题11所示（单位：千元），试用已付ALAE与已付赔款比率法，重新估计该保险公司在2008年底应计提的ALAE准备金（采用原始加权平均法选取相关比率，已知进展年3～∞的进展因子为1.01）。

14. 已知如下信息：

事故年	已赚保费/元	已报案损失/元	终极发展因子
2002	6 200	3 200	1
2003	6 500	3 400	1.053
2004	7 500	3 500	1.176
2005	7 800	2 800	1.429
2006	7 800	2 100	2
2007	7 000	1 600	4
合计	42 800	16 600	

（1）试用链梯法计算事故年2007年的IBNR准备金。

（2）假设采用固定赔付率82%，应用预算IBNR方法计算的事故年2007年的IBNR准备金与链梯法的差值是多少？

15. 某保险公司根据历史经验，有如下信息：

累积已付赔款次数

事故年	进展年			
	0	1	2	3
2005	22 580	25 050	24 940	24 765
2006	22 999	27 265	26 900	—
2007	15 885	18 340	—	—
2008	12 369	—	—	—

累积已决赔款　　单位：千元

事故年	进展年			
	0	1	2	3
2005	19 300	37 350	50 400	62 400
2006	20 550	42 878	62 825	—
2007	17 000	33 560	—	—
2008	11 333	—	—	—

针对已决赔款次数，进展因子 $3 \sim \infty = 0.99$，案均赔款进展因子 $3 \sim \infty = 1.01$，均采用原始加权平均法计算各进展因子。

问：（1）试用链梯法估计各事故年的最终赔款次数。

（2）采用已决案均赔款法估计 IBNR 准备金。

第六章　再保险的精算问题

学习目标

- □ 掌握再保险的基本概念、分类和性质，了解再保险市场和发展概况，了解寿险再保险的基本知识
- □ 熟练掌握三种比例再保险和三种非比例再保险的自留额和分出额的计算
- □ 初步了解比例再保险和非比例再保险的费率厘定以及准备金评估的知识
- □ 了解最优再保险的意义、常见研究方法及准则
- □ 了解目前再保险的创新热点：财务再保险和巨灾风险证券化的相关知识

§6.1　再保险概述

6.1.1　再保险的概念

再保险又称分保，是保险人对其承担的风险责任进行转移的行为或方式，是对保险人的保险。根据《中华人民共和国保险法》（以下简称《保险法》）第二十九条："保险人将其承担的保险业务，以分保形式部分转移给其他保险人的，为再保险。"

为分散风险，保证其业务经营的稳定性，保险人在承保业务后，根据风险的大小和自身的能力，将其承担风险责任的一部分转嫁给另一家或若干家保险公司或再保险公司，这就是再保险行为。再保险关系是通过再保险双方订立再保险合同而建立的。在再保险合同中，将保险业务分出的一方称为原保险人，也称分出公司或再保险分出人。分入保险业务的一方称为再保险人，也称分入公司或接受公司。同时，再保险接受人接受的风险也可以进一步向其他保险人分出，这种经营活动称为转分保。

分出公司自留的那部分保险业务或保险责任称为自留额，也称为自负责任；分出公司分出的那部分保险业务或保险责任称为分保额，也称分保责任。原保险人将保险责任转移给再保险人，相当于购买了再保险接受人的保险，因此需要向再保险接受人支付再保险费，又称分保费。而由于再保险人通常将保险业务的各项事宜交由原保险人单独处理，对于原保险人

业务费用开支（营业税/手续费/管理费用等等），再保险人接受人会向原保险人支付费用，这部分报酬称为再保险佣金或分保手续费。

6.1.2 再保险的性质和分类

保险标的是指保险对象的财产及其有关利益或者人的寿命和身体。以财产为保险标的的保险合同属于补偿性合同，以人的寿命和身体为保险标的的保险合同属于给付性合同。再保险合同的标的是双方当事人权利义务共同所指的对象，即分出人承担的损失补偿责任或给付责任。再保险人不是直接对原保险合同标的的损失给予补偿，而是对原保险人所承担的责任给予补偿。由此可见，再保险合同属于补偿性合同。

再保险是由直接保险派生出来的，是以直接保险业务为基础的却又相对独立的。所谓直接保险是保险人和投保人直接签订保险合同的保险业务，包括原保险和共同保险。

再保险的风险是原被保险人的原始风险，但与原被保险人之间没有法定的契约关系。原保险的存在是再保险存在的前提，没有原保险就没有再保险，而且再保险人的责任以原保险人的责任为限的。但是再保险只是分散风险的一种选择，和原保险没有从属关系，再保险和原保险的合同主体不同，合同标的更是不同。再保险合同的标的是原保险人对原被保险人承担的保险赔偿或给付责任。

再保险为保险人转移和分散风险的作用与共同保险有异曲同工之妙。共同保险是投保人与两个或两个以上保险人直接签订保险合同，由两个或两个以上保险人联合，共同承担同一保险标的、同一保险利益、同一保险责任，总保险金额不超过保险标的可保价值的保险。就分散风险而言，共同保险是对风险的第一次分散，而再保险是对风险的第二次分散。就法律关系而言，共同保险中，投保人与各个并列保险人之间关系是直接的，而再保险中的投保人只与原保险人有直接关系。

再保险有很多种类，基本的分类标准有三种：按分保责任划分，按分保安排划分，按实施方式划分。

按分保责任，再保险分为比例再保险和非比例再保险。保险公司在经营业务时会把自己所承担的保险责任控制在适当额度内，将其超出自身承保能力的风险以再保险的方式分出去。保险公司自己承保的部分就是自留额或自留比例，分出去的部分是分保额或分出比例。比例再保险是以保险金额为基础来确定自留额和分保额的再保险方式，可以再细分为成数再保险、溢额再保险以及成数和溢额混合再保险。非比例再保险是以赔款金额为基础来确定自负责任和分保责任的再保险方式，可以细分为险位超赔再保险、事故超赔再保险和赔付率超赔再保险（又称停止

损失再保险)，有时将险位超赔再保险和事故超赔再保险统称为超额赔款再保险。

按分保安排，再保险分为临时再保险、合约再保险和预约再保险。临时再保险中，再保险分出公司就每一张保单、每一笔业务与再保险接受公司签订单独的再保险协议，多用于单个巨额业务或超合同范围的特殊风险业务。合约再保险中，再保险分出公司事先与接受公司就再保险范围、方式和条件等进行商定，并以合约方式固定下来达成分保协议。预约再保险是双方预先商定的再保险协议，分出公司可以决定是否将有关风险或责任转让给接受公司，一旦决定分出，再保险接受公司必须接受。

按实施方式，再保险分为法定再保险和商业再保险。法定再保险即为强制再保险，是按照国家法律规定，再保险分出公司必须将其承保业务的一部分向国家再保险公司或由政府指定的再保险公司进行分保的再保险。商业再保险即为自愿再保险，是再保险分出公司和接受公司双方根据自愿原则，约定双方的权利和义务的再保险。

6.1.3　再保险的发展及市场概述

总的来说，我国再保险业发展的历史不长，新中国成立后我国保险业大多是由原中国人民保险公司独家经营，再保险业也不例外。1979 年恢复国内保险业务以来，中国保险业以年均 37.6% 的速度增长，为再保险业的兴起奠定了基础。

随着其他保险主体的出现，1988 年根据《保险企业管理暂行条例》的规定，国内开始办理 30% 法定分保业务，由人保再保部代行国家再保险公司的职能。1996 年人保组建集团公司，成立了中保再保险有限公司（中保再)。至此，国内才有了一家经营再保险业务的专业公司。1999 年 3 月，中国再保险公司（中国再）在中保再的基础上组建成立，从此中国民族再保险业进入了一个新的发展时期。

据中国再保险公司的统计，该公司 1999 年再保险保费收入为 122.14 亿元，年末总资产达 120 亿元，比成立之初增长了 295.52%。但其业务的 97% 来自《保险法》规定的法定分保，只有 3% 来自国内外商业性再保险业务；而来自国内的商业性分保业务，年均仅占国内市场的 3%，其余的 96% 均因各种原因分流到了国外。

近十年，我国再保险专业公司从无到有，再保险市场从小到大，对保险业发展的独特支撑作用日益突出。在加入世贸组织前，再保险市场一直是以法定分保为主，然而按照加入世贸组织的承诺，法定分保比例逐年递减并在 2006 年取消。从 2003 年起，我国法定分保比例逐年递减，国内再保险分保费曾一度呈现负增长。此后，随着中、外资专业再保险

公司及分公司的相继成立，我国再保险市场以商业分保为主的竞争格局逐步形成。2005 年我国保费收入 4 927 亿元，再保险保费收入 215 亿元，虽然所占比重仅为 4.3%，但当年商业分保费收入超过法定分保，达到总分保费收入的 67.94%。我国再保险市场逐步完成了由法定分保向商业分保的市场化转变，再保险业务的商业化运作标志着中国再保险市场进入新的发展阶段。

6.1.4 寿险再保险概述

宏观来说，寿险业务每一风险单位的保额不高，所以运用再保险以分散风险的重要性并不显著。但是随着经济的发展和人们收入水平的不断提高以及保险意识的增强，个人高额保险单和团体保险的日益增多，使保险人的积累责任增大，寿险再保险的重要性日益提高。

相对于财产再保险而言，寿险再保险具有以下三个特点：

一是寿险再保险经营的长期性。寿险再保险除经营短期健康险、意外险等业务外，很大一部分要经营长期保险。因此寿险再保险在精算、核保、核赔、资金运用等方面都不同于短期经营的财产险业务，也需要按照寿险模式进行经营管理。

二是寿险再保险保障的整体性。相对于财产再保险来说，寿险再保险更多地是分散单笔业务的高额风险，寿险业务由于单笔金额相对较小，更多地关注寿险业务整体经营的稳定性，因此，基于使直接保险公司经营财务结果得到改善的财务再保险在寿险再保险中日益发挥重要作用。

三是寿险再保险服务的全面性。寿险市场，特别是新兴寿险市场的发展，离不开专业寿险再保险公司在技术及承保能力上的全方位支持。寿险的投保人群存在很大的个体及地方差异，专业的寿险再保险公司由于拥有的业务覆盖范围大，数据样本多，专业技术力量强，能为寿险公司提供各种技术帮助。

我们知道，寿险公司的资本结构具有相对资本较少、绝对资本较大的特点，其资本绝大部分都是通过保费负债而来，杠杆效应非常明显，再加上它本身就是经营风险业务，它经营的成败与否对于整个杜会的稳定有很大关系，因此对于寿险公司资本的结构和规模的要求相对于一般企业而言更加严格。

寿险再保险成为寿险公司融通资金的一种新的途径，从而改变了寿险公司传统的资本结构模式。寿险公司通过不同的再保险方式将赔付责任转移给了再保险公司，当事故发生时，寿险公司就可以从再保险公司中得到部分赔偿金支付给投保人。在这种模式下，公司既降低了由于负债比例过大而带来的破产、清偿压力，又减少了通过所有权融资带来的分红压力，

从这个角度来看，它优化了寿险公司的资本结构。

寿险再保险转移了寿险公司的承保风险和时机风险，从而降低了监管部门和评级机构对其严格的资本规模要求，提高了股东收益。正是由于再保险能够转移寿险公司的部分经营风险，部分监管部门尤其是美国、加拿大以及澳大利亚等国以及评级机构对于寿险公司资本规模的监管与其资本结构相结合，重点考察寿险公司的经营风险。如果寿险公司通过再保险转移了承保风险，对其相应的资本规模以及偿付准备金要求就会低一些，这样，寿险公司对其所持有的资产投资的规模和灵活性就会更大一些，资产就可以投资于回报较高的一些项目，从而提高了公司价值和股东收益。

寿险再保险可以调节寿险公司赢利的确认时间，从而可以从合理避税的角度增加寿险公司的股东收益达到优化资本结构的目的。许多国家的税法都规定，在计算缴纳所得税时，以前年度的亏损可以在一定的期限内用以后年度的税前利润进行弥补，如我国税法规定，纳税人发生年度亏损时，可以用以各年利润弥补，但延续补期不超过 5 年，这样寿险公司就可以运用再保险进行调节各年的利润确认时间从而降低所得税，提高股东的收益率。

据瑞士再保险最新 Sigma 研究报告得出来的结论称，2008 年，中国寿险保费飚升 40.9%，达到 958 亿美元，这使得中国就寿险保费收入而言成为仅次于日本的亚洲第二大市场。不过中国的总体保险深度依然很低，仅为 3.3%，远低于 7.1% 的全球平均水平，反映了中国寿险再保险的未来增长空间十分充足。

我国再保险业发展的历史不长，2003 年年底中国人寿再保险股份有限公司成立，是国内第一家，也是唯一一家专门从事人寿再保险业务的公司，它的成立揭开了寿险再保险专业化经营发展的一幕。我国再保险市场一直以法定分保业务为主，商业再保险业务量较小，但随着我国寿险市场的整体高速发展，以及加入 WTO 后法定分保比例的逐年降低，国内寿险再保险的发展速度明显加快。外资再保险公司开始进入中国市场，慕尼黑再保险公司、瑞士再保险和科隆再保险公司已在华设立了分公司，另外有 9 家外资再保险公司在华设立了 12 家代表处。

随着我国寿险业务迅速增长，寿险公司更加注重业务发展的质量，风险的控制和防范，以及经济效益的稳步提高。越来越多的寿险公司运用再保险，增加资本，减少风险，和缩减对资本的需求。再保险作为保险公司风险管理的重要手段，促进寿险市场快速健康发展的作用日益凸显，寿险再保险市场也必将随着寿险市场的发展而壮大。

§6.2 再保险自留额与分出额的计算

6.2.1 比例再保险自留额与分出额的计算

比例再保险又称“比例分保”，是以保险金额为计算基础安排的分保方式，是指分出人与分入人相互订立合同，按照保险金额比例分担原保险责任的一种分保方法。在这种方法中，分出人的自留额和分保额表现为保额的一定比例。比例再保险的最大特点就是保险人和再保险人按照比例分享保费，分担责任，并按照同一比例分担赔款，同时再保险人按照比例支付手续费。

比例再保险可分为成数再保险、溢额再保险以及成数和溢额混合再保险。

1. 成数再保险的计算。成数再保险是指原保险人将每一危险单位的保险金额，按照约定的比率分给再保险人的再保险方式。按照成数再保险方式，不论分出公司承保的每一危险单位的保额大小，只要是在合同规定的限额之内，都按双方约定的比率进行分配和分摊。总之，本再保险方式的最大特征是“按比率”再保险。

每一份成数再保险合同都按每一危险单位或每张保单规定一个最高责任限额，分出公司和接受公司在这个最高责任限额中各自承担一定的份额。一旦各公司承担责任的百分比率确定，则保费和赔款就按相应百分比率来计算。

【例6-1】 假定某保险人与再保险人签订了一份货运险的成数再保险合同，合同规定每一艘船的最高限额为1 000万美元，分出公司自留20%，分出80%，则保险人和再保险人对于责任和保费的分配以及赔款额的分摊计算如表6-1所示。

表6-1　　单位：万美元

船名	总额（100%）			自留（20%）			分出（80%）		
	保险金额	保费	赔款	保险金额	保费	赔款	保险金额	保费	赔款
A	200	2	0	40	0.4	0	160	1.6	0
B	400	4	10	80	0.8	2	320	3.2	8
C	600	6	20	120	1.2	4	480	4.8	16
D	1 000	10	0	200	2	0	800	8	0

【例6-2】 某成数再保险合同规定，每一风险单位的最高限额为200万元，自留30%，分出部分为70%。如果风险单位A的保险金额为100万

元，则保险费和今后的赔款按30%和70%的比例分摊；如果风险单位B的保险金额为250万元时，由于250万元超过了最高限额，所以自留部分30%为保险金额60万元，成数再保险人的70%为140万元，超过合同限额的50万元应列入其他合同或安排临时分保，否则由分出公司自己承担。

【例6-3】 原保险人与再保险人签订成数分保合同，每一风险单位的最高限额为200万元，再保险人的分保责任是25%，现有两个风险单位分别发生赔案：风险单位1的保险金额为150万元，赔款40万元；风险单位2的保险金额为250万元，赔款100万元。则对风险单位1，再保险人应支付$40\times25\%=10$万元；对风险单位2，再保险人应支付的金额如下计算：超过200万元的部分不赔，$\frac{200}{250}\times100=80$万元，按照25%的责任，再保险人应赔付$80\times25\%=20$万元。

成数再保险的特点可用两个优点和两个缺陷来概括：两个优点即合同双方利益一致，手续简便；两个缺陷是指它缺乏弹性，同时难以达成风险责任的均衡化。但成数再保险优点是主要的，这是成数再保险被广泛采用的重要原因。

一般来说，成数再保险多运用于新的公司、险种和特种业务方面。具体大致有8种情况：新创办的保险公司；对于新开办的险种；汽车险等危险性较高、赔款频繁的业务；对于保额和业务质量比较平均的业务；各类转分保业务；国际分保业务；属于同一资本系统的子公司和母公司之间，以及集团内部的分保；成数再保险与其他分保方式混合运用。

2. 溢额再保险的计算。溢额再保险是由保险人与再保险人签订协议，对每个危险单位确定一个由保险人承担的自留额，保险金额超过自留额的部分称为溢额，分给再保险人承担。危险单位、自留额和线数是溢额再保险的三要素。

溢额再保险是以保险金额为基础来确定再保险当事双方的责任的。对于每一笔业务，自留额已先定好，将保险金额与自留额进行比较，即可确定分保额和分保比例。也就是说，溢额再保险的自留额，是一个确定的自留额，不随保险金额的大小变动，而成数再保险的自留额表现为保险金额的固定百分比，随保险金额的大小而变动。

溢额再保险的合同容量或合同限额，通常以自留额的倍数计算。换句话说，自留额是厘订再保险限额的基本单位，在溢额再保险中称为“线”，前述自留额的一定倍数，即指此线数。一般而言，分出公司根据其承保业务和年保费收入来决定自留额和溢额分保合同的最高限额的线数。由于承保业务的保额增加，或是由于业务的发展，有时需要设置不同层次的溢额，依次称为第一溢额、第二溢额等等。

【例6-4】 某溢额再保险合同，每一风险单位自留额为30万元，溢

额分保的限额计为10根线，即300万元。当风险单位A的保险金额为20万元时，原保险人自留全部责任。当风险单位B的保险金额为100万元时，自留与溢额分保的责任比为3:7，即保费和赔付责任的分摊比例为3:7。当风险单位C的保险金额为400万元时，则自留30万元，溢额分保300万元，超过总承保能力的70万元列入其他合同。

【例6－5】 假定某保险人与再保险人分别签订了两份货运险的溢额再保险合同，危险单位按照每一船每一航次划分。分出公司自留额为10万美元，第一溢额合同限额为10条线，即100万美元，第二溢额合同限额为15条线，即150万美元，则分出公司与各再保险人之间有关保险责任和保费的分配以及赔款额的分摊计算如表6－2所示。

表6－2　　单位：美元

	船　名	A	B	C	D	合　计
总额	保险金额	50 000	500 000	2 000 000	2 500 000	5 050 000
	保险费	500	5 000	20 000	25 000	50 500
	赔款	0	10 000	20 000	100 000	130 000
自留部分	自留额	50 000	100 000	100 000	100 000	350 000
	自留比例	100%	20%	5%	4%	
	自留保险费	500	1 000	1 000	1 000	3 500
	自负赔款	0	2 000	1 000	4 000	7 000
第一溢额	分保额	0	400 000	1 000 000	1 000 000	2 400 000
	分保比例	0	80%	50%	40%	
	分保保费	0	4 000	10 000	10 000	24 000
	分摊赔款	0	8 000	10 000	40 000	58 000
第二溢额	分保额	0	0	900 000	1 400 000	2 300 000
	分保比例	0	0	45%	56%	
	分保费	0	0	9 000	14 000	23 000
	分摊赔款	0	0	9 000	56 000	65 000

溢额再保险的特点是：可以灵活确定自留额和比较繁琐费时。一般来说，对于危险性较小、利益较优且风险较分散的业务，原保险人多采用溢额再保险方式，以保留充足的保险费收入。对于业务质量不齐、保险金额不均匀的业务，也往往采用溢额再保险来均衡保险责任。在国际分保业务中，溢额分保也是常见和乐于考虑接受的分保业务之一。

3. 成数和溢额混合再保险的计算。成数和溢额混合再保险，是将成数再保险和溢额再保险组织在一个合同里，以成数再保险的限额，作为溢额再保险的起点，再确定溢额再保险的限额。

【例6-6】 某成数和溢额混合再保险合同约定，成数再保险的最高责任额为100万元，在100万元以下的业务，全部由成数再保险合同处理，由分出公司自留其中的20%，分人公司接受其余的80%。超过100万元以上的业务由溢额再保险合同处理，溢额再保险的最高责任额为成数再保险限额的5条线，即500万元。关于此混合再保险合同的保险责任和保险费分配以及赔款分摊的计算如表6-3所示。

表6-3 单位：万元

		A	B	C	D	合 计
总额	保险金额	50	200	500	800	
	保险费	0.5	2	5	8	15.5
	赔款	2	30	60	0	92
自留部分	自留额	10	20	20	220	
	自留比例	20%	10%	4%	27.5%	
	自留保险费	0.1	0.2	0.2	2.2	2.7
	自负赔款	0.4	3	2.4	0	5.8
成数分保	保额	40	80	80	80	
	分保比例	80%	40%	16%	10%	
	分保保费	0.4	0.8	0.8	0.8	2.8
	分摊赔款	1.6	12	9.6	0	23.2
溢额分保	保额	0	100	400	500	
	分保比例	0	50%	80%	62.5%	
	分保费	0	1	4	5	10
	分摊赔款	0	15	48	0	63

由于业务D的保险金额为800万元，超过了成数溢额混合再保险合同的600万元限额，因此将超过的200万元全部做为自留。

成数再保险和溢额再保险的混合是一种灵活方便的分散风险的方式，一方面能充分利用成数再保险手续简便的优点，另一方面又能利用溢额再保险超额保障的特点，解决较高保额业务的问题。

6.2.2 非比例再保险自留额与分出额的计算

非比例再保险以损失为基础来确定再保险当事人双方的责任，故又称损失再保险，一般称之为超过损失再保险。由于超过损失再保险是对原保险人赔款超过一定额度或标准时，再保险人对超过部分责任负责，故又称第二危险再保险，以表示责任的先后。

非比例再保险分为险位超赔再保险、事故超赔再保险、赔付率超赔再

保险三种方式。

1. 险位超赔再保险的计算。险位超赔再保险是指以每一风险单位或每一保单在一次事故中所发生的赔款金额来计算自留额和分保额。合同双方约定，对每一危险单位所发生的赔款，分出公司自负一定的金额，接受公司负责超过部分的一定金额。如果发生的赔款在自负责任额之内，则由分出公司自行赔付，如果发生的赔款超过分出公司的自负责任额，则由接受公司对超过部分在一定限额内进行赔付。

关于险位超赔在一次事故中的赔款计算，有两种情况：一是按危险单位分别计算，没有限制；二是有事故限额，对每次事故总的赔款有限制，一般为险位限额的 2 ~ 3 倍，即每次事故接受公司只赔付 2 ~ 3 个单位的损失。

【例 6 -7】 假定分出公司的自负责任额为 100 万元，接受公司承担的最高责任额为 500 万元，其赔款责任的分配如表 6 -4 所示。

表 6 -4 单位：万元

保险金额	发生赔款	分出公司承担赔款	接受公司承担赔款	其他
80	10	10	0	0
450	130	100	30	0
3 000	600	100	500	0
8 000	750	100	500	150

【例 6 -8】 现有一超过 200 万元以后的 1 000 万元的火险险位超赔再保险合同。在一次事故中有三个危险单位遭受损失，每个危险单位损失 300 万元。如果每次事故对危险单位没有限制，则赔款分摊如表 6 -5 所示。

表 6 -5 险位超赔的赔款分摊表（没限制） 单位：万元

危险单位	发生赔款	分出公司承担赔款	接受公司承担赔款
Ⅰ	300	200	100
Ⅱ	300	200	100
Ⅲ	300	200	100
共计	900	600	300

但如果每次事故有危险单位限制，比如为险位限额的 2 倍。则赔款分摊如表 6 -6 所示。

表 6-6　　险位超赔的赔款分摊表（有限制）　　单位：万元

危险单位	发生赔款	分出公司承担赔款	接受公司承担赔款
Ⅰ	300	200	100
Ⅱ	300	200	100
Ⅲ	300	300	0
共计	900	700	200

在这种情况下，由于接受公司已经承担了两个危险单位的赔款，所以第三个危险单位的损失全部由分出公司自己负责。

2. 事故超赔再保险的计算。事故超赔再保险是以一次事故所发生的赔款总和计算自留额和分保额，即一次事故中许多风险单位同时发生损失，责任累积额超过自留额，由接受公司负责。在这种再保险的方式下，不论每次事故中涉及的风险单位有多少、保险金额有多大，只要总赔款是在分出公司的自负责任额内，就由分出公司自己负责赔款，而分入公司只对超过的部分负责。事故超赔再保险的责任计算，关键在于一次事故的划分。有的巨灾事故如台风、洪水和地震，有时间条款来规定多少时间作为一次事故，有的还有地区规定。对于事故持续较长时间的，如森林大火和地震，按一次事故或几次事故，在责任分摊上是不同的。

在事故超赔再保险方式中，有一种分“层”的安排方法，设置若干层次的超赔分保，每一层的再保险额度虽然不高，但若将各个层次的额度累计，则可达到相当高的金额，分出公司和接受公司均有利。在事故超赔分层再保险中，第一层的起赔点就是分出公司的自负责任额，第二层的起赔点或称基数是第一层自负责任额和再保险责任额的合计，第三层的起赔点是第二层的起赔点与再保险责任额的合计，以下各依此类推。

【例 6-9】 假设有一超过 100 万元以后的 100 万元的巨灾超赔再保险合同，一次台风持续了 4 天，该事故共损失 400 万元。按规定台风、飓风、暴风连续 48 小时内为一次事故，地震、洪水连续 72 小时内为一次事故，其他的巨灾事故连续 168 小时内为一次事故。

若按一次事故计算，400 万元赔款，原保险人先自负 100 万元，再保险人承担 100 万元赔款，剩下的 200 万元赔款仍由原保险人负责，原保险人共承担了 300 万元赔款。

若按两次事故计算，并假设第一个 48 小时损失 150 万元，第二个 48 小时损失 250 万元，则赔款的分摊情况如下：

	分出公司承担赔款	接受公司承担赔款
第一个 48 小时损失 150 万元	100 万元	50 万元
第二个 48 小时损失 250 万元	100 万元	100 万元

另外50万元由分出公司负责，即分出公司负责250万元，接受公司负责150万元。

【例6-10】 假定业务需要安排一超过50万美元以后的1 000万美元的巨灾超赔分保，分出公司可以分四层安排如下：

第一层：超过50万美元以后的50万美元；

第二层：超过100万美元以后的150万美元；

第三层：超过250万美元以后的250万美元；

第四层：超过500万美元以后的550万美元；

分层安排结果：第一层再保险人承担50万美元，第二层再保险人承担150万美元，第三层再保险人承担250万美元，第四层再保险人承担550万美元，各层再保险人共计承担1 000万美元的超赔责任。发生赔款时由第一层再保险人先行赔付，尚有不足，从第二层开始依次往高层摊赔。

3. 赔付率超赔再保险的计算。赔付率超赔再保险，是按赔款与保费的比例来确定自负责任和再保险责任的一种再保险方式，即在约定的一定时期（通常为一年）内，赔付率超过一定标准时，由再保险人就超过部分负责至某一赔付率或金额。由于赔付率超赔再保险可以将分出公司某一年度的赔付率控制在一定的标准之内，所以，对于分出公司而言，有停止损失再保险或损失中止再保险之称。

【例6-11】 假定一份赔付率超赔再保险合同规定，赔付率在70%以下由分出公司负责，70%~120%的部分，即超过70%但不高于50%的部分由接受公司负责，并规定赔付金额60万元的责任限制，两者以较小者为准。

假设净保费收入为100万元，已发生赔款为80万元，则赔付率为80%，分出公司负责70%，计70万元；接受公司负责70%以后的部分，即10%，计10万元。

但倘若已发生赔款为135万元，赔付率达到135%，则分出公司负责70%，即70万元，超过70%的50%部分由接受公司负责，即50万元（小于60万元），超过120%以上的部分仍由分出公司负责，即15万元，分出公司负责总计85万元。

有时还可以将赔付率在70%~120%之间的这一部分，由分出公司再负责10%，接受公司负责剩余的90%。这样规定的目的是使分出公司与超过约定赔付率以上部分的每一赔款都有相当的利害关系，以此来预防分出公司因松懈核保核赔而损害再保险人的利益，这种做法称为共同再保险。如在上面的第二种情况中，接受公司原本负责50万元赔款，按照上述共同再保险办法，接受公司负责的赔款为45万元。

§6.3　再保险的费率厘定和准备金评估

6.3.1　再保险的费率厘定

1. 比例分保合约的费率厘定。最简单的比例再保险合约形式是成数分保，此时再保险接受人对所有的分保业务按照一恒定的比例分入，作为交换，再保险接受人也须按照同一比例支付包括直接理赔费用在内的损失。同时，再保险接受人还需要向再保险分出人支付分保手续费，用于弥补再保险分出人的有关费用。另一种比较复杂的比例分保合同是溢额分保，该分保方式被广泛应用于财产保险业务。

对于比例再保险来说，再保险费率与原保险费率相同。其定价步骤如下：

第一步，搜集并整理分保合约的历史数据资料。一般而言，需要搜集5年以上的该比例再保险合约下的已发生损失和保费收入数据。若无法获取，也可以搜集分保前的历史数据，再根据溢额分保合同进行调整，将其转化为假想该分保合约存在条件下的经验数据。若比例分保合约是以损失发生制为基础的，则应当采用已赚保费和事故年损失数据进行计算；若分保合约是以保单签发制为基础，则应当采取合约期内的承保保费和相应损失数据进行计算。

这里我们介绍一下损失发生制和保单签发制。损失发生制是指凡在分保合同期限内有效保单项下所发生的损失，均属于分保合同承担的责任，而不论原保单是在何时签发的，对于分保合同到期时的未满期原保单，可以由续转的分保合同承保或将原分保合同期限延长。保单签发制是指凡在分保合同期限内签发的保单，以每一危险单位所发生的赔款为基础，均属于分保合同承担的责任，也就是说，即使分保合同到期，对于分保期限内签发的保单应负责到原保单自然期满为止。

第二步，剔除巨灾和激波损失。巨灾损失是单个事件（飓风、地震等）引起的损失，激波损失是那些仅涉及一张保单、但对公司整体经营业绩产生巨大影响的非巨灾损失。对财产保险合同而言，巨灾损失通常是以影响多个危险单位的单个事故为基础，而激波损失是由单风险产生的多个重大损失。对责任保险而言，巨灾可能影响到多个被保险人，且赔付类型相对固定，而激波损失是保险公司向一张保单所支付的大额赔款。

第三步，将经验损失数据发展到终极水平，并对未来期间进行预测。首先，将历史数据发展到终极水平，通过分保合约的经验数据估计损失发展因子。根据信息获得的渠道，再保险承保人往往需要对再保险分出经验

数据中存在的报告延迟、事故年与保单年之间的差异进行调整。其次，将历史保费调整到未来水平，此时需要用到费率的历史调整信息及平均定价因子。对以损失发生制为基础的合约，可以利用平行四边形法计算费率均衡因子，同时也需要计算在合约期内未来费率变化情况将产生的影响。最后，对损失数据进行趋势化分析，将其调整到未来期间的损失水平。

第四步，选择适用于该分保合约（不含巨灾成分）的期望损失率。如果上一步骤所采用的数据可信，那么期望损失率（不含巨灾成分）就等于调整到未来水平的平均历史损失率。

第五步，考虑巨灾因素，对（不含巨灾成分）期望损失率进行调整。在通常情况下，由于历史损失数据严重不足，使得难以确定该风险附加的多少。此时可以通过下列几种办法解决：根据分出公司不同地区未来保费分布情况的预测，计算巨灾风险附加的平均值；或者在分保合约存在事故限额的情况下，估计每年超出该限额的平均次数；或者在一个较长的时期内分摊历史巨灾损失；或者通过建立巨灾模型模拟计算年巨灾损失的期望值。

第六步，根据分保手续费和其他费用估计综合比率。分保手续费常常按梯次佣金制为基础进行计算。其他费用包括再保险接受人的管理费用、经营费用和经纪人佣金（若存在）。

第七步，再保险接受人需要评估该分保合约的综合比率估计值，确定是否可接受。这里的综合比率是指交易基础综合比率。

$$\text{交易基础综合比率}=\frac{\text{已发生损失}+\text{理赔费用}}{\text{已赚保费}}+\frac{\text{已发生承保费用}}{\text{净承保保费}}$$

另外，实务中还要综合考虑潜在投资收入和风险水平，以确定该业务能否达到再保险接受人的目标回报率。

下面举例说明如何对比例分保合约进行费率厘定。

【例 6-12】 假定再保险分出人需要一份自 2003 年 1 月 1 日生效的一年期财产成数分保合约，它要求以损失发生制为承保基础。假定分出业务的保单期为一年，再保险分出人提供了过去 6 年的历史经验数据、费率变化以及损失流量三角形。

历史经验数据的时间长度为 5 年加上 2002 年的一部分，对各事故年已发生损失数据进行整理，包括个案准备金（已发生已报案未决赔款准备金）、直接理赔费用，但是不包括已发生未报案未决赔款准备金（IBNR）。

设评估日为 2002 年 9 月 30 日，在此时点上分析各事故年的经验数据，具体见表 6-7。在表 6-7 中，列(4)=列(3)/列(2)，为各事故年的损失率。这里，1998 事故年的已发生损失中包括因洪水泛滥导致的洪水巨灾损失 160 723.2 万元。

表 6－7　　计算比例分保合约的损失率

(1) 事故年	(2) 已赚保费（万元）	(3) 已发生损失（万元）	(4) 损失率
1997	154 076.3	90 456.6	58.71%
1998	163 937.1	239 345.2	146.00%
1999	185 454.3	110 734.5	59.71%
2000	209 877.8	112 421.2	53.57%
2001	201 345.3	112 208.0	55.73%
2002	174 554.2	55 632.0	31.87%
总计	1 089 245.0	720 797.5	64.71%

若剔除洪水巨灾的损失，并且假设损失的年通胀率为4%，并计算终极发展因子。可以根据各事故年的已发生损失计算趋势化最终已发生损失，计算过程见表 6－8。

表 6－8　　计算趋势化最终损失

(1)事故年	(2)已发生损失(万元)	(3)终极发展因子	(4)趋势化因子	(5)趋势化最终损失(万元)
1997	90 456.6	1.000	1.265	114 456.5
1998	78 622.0	1.000	1.217	95 655.7
1999	110 734.5	1.010	1.170	130 839.1
2000	112 421.2	1.075	1.125	135 943.0
2001	112 208.0	1.126	1.082	136 656.1
2002	55 632.0	2.667	1.040	154 305.4
总计	560 074.3			767 855.7

在列(2)中，已经将洪水巨灾损失从 1998 事故年的已发生损失中剔除掉。

对于列（3），可利用未决赔款准备金评估方法以及适当的主观判断得到该列数据。注意到 2002 年事故年的终极发展因子比较大，这是因为该事故年的数据不完整，需要将其调整到全年，而且该事故年的已发生损失数据离评估日最近，终极发展因子应该最大。

对于列（4），以 2000 事故年为例，由于该事故年所有损失的平均发生日期为 2000 年 7 月 1 日，且新分保的有效期间为 2003 年 1 月 1 日到 2003 年 12 月 31 日，所保障损失的平均发生日为 2003 年 7 月 1 日，与 2000 事故年损失的平均发生日相距 3 年，因此趋势化因子为 $(1+4\%)^3=1.125$，其他事故年趋势化因子的计算类似。

列(5)是将在列(2)、列(3)、列(4)中的数据连乘以后得到的，即

$$趋势化最终损失=已发生损失\times终极发展因子\times趋势化因子$$

另外，根据历史资料和合理预测，费率变化情况如表 6－9 所示，其中自 2003 年 4 月 1 日费率增长 10% 的信息来源于对再保险分出人未来费率变化的估计。

表 6－9　　费率变化情况表

生效期	1997—01—01	1999—01—01	2000—07—01	2003—04—01
费率变化	+2.00%	+10.00%	-4.00%	+10.00%

根据表 6－9 的信息，利用平行四边形法，可以计算各年度的保费均衡因子，这里假设 2003 年的均衡因子为 1.000。结果见表 6－10，计算过程略。

表 6－10　　各年度的保费均衡因子

年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
保费均衡因子	1.096	1.086	1.034	0.992	1.028	1.028	1.000

这样，利用各日历年的均衡因子，可将各事故年的已赚保费调整到 2003 年的保费水平。另外，对 2002 事故年，需要将三个季度的已赚保费调整到全年，一般按照比例法调整。因此，该年度的已赚保费为：1 745 542 000×4/3＝2 327 389 000 元。

最后，假设财产价值的年通胀率为 3%，可得到已赚保费的调节表。具体见表 6－11。

表 6－11　　已赚保费的调节表

(1) 事故年	(2) 未调整已赚保费（元）	(3) 均衡因子	(4) 趋势化因子	(5) 均衡保费（元）
1997	1 540 763 000	1.096	1.194	2 017 195 000
1998	1 639 371 000	1.086	1.159	2 063 351 000
1999	1 854 543 000	1.034	1.126	2 158 273 000
2000	2 098 778 000	0.992	1.093	2 274 952 000
2001	2 013 453 000	1.028	1.061	2 196 149 000
2002	2 327 389 000	1.028	1.030	2 464 633 000
总计	11 474 297 000			13 174 553 000

其中列(4)是根据财产价值年通胀率 3% 得到的，以 2000 事故年为例，该事故年已赚保费的平均赚取日期为 2000 年 7 月 1 日，而新分保已赚保费的平均赚取日期为 2003 年 7 月 1 日，两者相距 3 年，趋势化因子为 $(1+3\%)^3=1.093$，其他事故年趋势化因子的计算类似。最后一列则是列(2)、列(3)、列(4)中的数据连乘以后得到的。即

均衡保费 = 未调整已赚保费 × 均衡因子 × 趋势化因子。

根据表 6 - 8 和表 6 - 11 的计算结果，可以得到趋势化发展后的损失率（剔除了巨灾影响），具体结果见表 6 - 12，其中，列（4）= 列（3）/列（2），为各事故年的损失率。

表 6 - 12　　计算损失率

（1）事故年	（2）均衡保费（元）	（3）最终损失（元）	（4）损失率
1997	2 017 195 000	1 144 565 000	56.7%
1998	2 063 351 000	956 557 000	46.4%
1999	2 158 273 000	1 308 391 000	60.6%
2000	2 274 952 000	1 359 430 000	59.8%
2001	2 196 149 000	1 366 561 000	62.2%
2002	2 464 633 000	1 543 054 000	62.6%
总计	13 174 553 000	7 678 557 000	58.3%

根据表 6 - 12 可知，按 2003 年的费率水平、财产价值水平计算得到的、扣除巨灾影响后的损失率为 58.3%。

接下来我们考虑巨灾的影响，首先计算已发生巨灾损失占总已发生损失的比率：

$$1\ 607\ 232\ 000 / 7\ 207\ 975\ 000 = 28.7\%$$

这里考虑了 6 个事故年的经验数据，根据经验可知，洪水巨灾大约每 8 年发生一次，因此考虑巨灾因素后的损失率为：

$$58.3\% \times (1 + 28.7\% \times 6/8) = 70.8\%$$

因此考虑巨灾因素后的损失率是 70.8%。

最后，我们要决定再保险接受人的综合比率。假定再保险分出人支出的费用情况如表 6 - 13 所示。

表 6 - 13　　计算综合比率

期望损失率	70.8%
分保手续费	25.0%
经纪人佣金	5.0%
管理费用	1.0%
固定费用	1.0%
综合比率	102.8%

实务中，再保险接受人的精算师必须考虑该分保合约的利润情况。对再保险接受人而言，102.8%并不能带来满意的利润回报，因此应当建议对该合约的有关条款进行修订，具体包括分保手续费、分保责任限额、其他可调整部分等。

2. 非比例再保险的费率厘定。非比例再保险费率的厘定比较复杂，以超额赔款再保险为例进行分析。

超额分保的费率类似于直接保险，也是由纯费率和附加费率构成，不同点在于超额分保中的附加费率所占比重较大。纯费率是以赔款成本（起赔点到最高限额间的各次损失的赔款合计）为基础计算而得的。下面介绍两种方法来计算纯费率。

（1）已知损失分布的计算方法。设某项超额赔款再保险损失金额 x 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$，分出公司自留额和自负赔款额分别为 r 和 $\hat{X}$，分入公司支付赔款额为 $\tilde{X}$。

分出公司自负赔款额的均值为：

$$E(\hat{X}) = \int_0^r xf(x)dx + \int_r^\infty rf(x)dx = \int_0^r xf(x)dx + r[1 - F(r)]$$

分入公司支付的赔款额均值为：

$$E(\tilde{X}) = \int_r^\infty (x - r)f(x)dx = \int_r^\infty xf(x)dx - r[1 - F(r)]$$

分入公司非零赔付部分损失的平均赔款为：

$$\begin{aligned} E(\tilde{X} \mid X > r) &= \int_r^\infty (x - r)f(x \mid r)dx \\ &= \int_r^\infty (x - r)\frac{f(x)}{1 - F(r)}dx \\ &= \frac{\int_r^\infty xf(x)dx}{1 - F(r)} - r \end{aligned}$$

【例 6－13】 设某项业务的赔款服从均值为 1 000 元，标准差为 1 500 元的 $Pareto(\alpha,\lambda)$分布，其密度函数为 $f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}$，$x > 0$，损失频率为 0.05。现安排一超额分保合同，分入公司根据合同要承担超过 2 000 元的损失赔付责任，求 2 000 份此类分保单的纯保费。

解： $Pareto(\alpha,\lambda)$分布的分布函数为：$F(x) = 1 - (\frac{\lambda}{\lambda + x})^\alpha$

由题意，有下列方程组：

$$\begin{cases} E(X) = \dfrac{\lambda}{\alpha - 1} = 1\ 000 \\ Var(X) = \dfrac{\alpha\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} = 1\ 500^2 \end{cases}$$

从而有：$\begin{cases}\alpha=3.6\\ \lambda=2\ 600\end{cases}$

由于，$E(\tilde{X}) = \int_{2\,000}^{\infty} x \dfrac{3.6\times 2\ 600^{3.6}}{(2\ 600+x)^{4.6}}dx - 2\ 000\left[1-1+\left(\dfrac{2\ 600}{4\ 600}\right)^{3.6}\right]$

$= 226.86$ 元

所有分保纯保费为：2 000 ×226.86 ×0.05 =22 686 元。

（2）劳合社比例方法。劳合社比例方法特别适用于财产保险。它是通过超额赔款中起赔点和最大可能损失（MPL）之间的关系建立各层平均超额损失占总损失的百分比表，进而决定各层纯保费。

超额分保各层纯保费 P 的计算公式如下：

$$P = r\times PF \qquad r=\frac{ELCF\times PPLR}{RCF}$$

其中：

r 为超额再保险的纯保费占原保险费的百分比；

PF 为原保险人收取该风险单位的纯保险费；

ELCF 为超额损失因子（超额赔款保险损失占总保险损失的百分比）；

PPLR 为原保险人平均赔付率（一定时期内总赔付占总保费的百分比）；

RCF 为修正率因子（用来弥补原保险公司损失率的不足）。

【例 6－14】 某火险的损失经验数据按赔款规模分级统计如表 6－14 所示。

表 6－14

赔款规模（元）	赔款金额（元）	赔款件数	平均赔款
0～5 000	640 900	754	850
5 000～10 000	876 000	120	7 300
10 000～15 000	810 000	60	13 500
15 000～25 000	440 000	20	22 000
25 000～35 000	155 000	5	31 000
35 000～50 000	40 000	1	40 000
总计	2 961 900	960	3 085

试厘定此险种的分层超额赔款再保险各层的费率。

解： 由上述损失经验数据，可以归纳出下列超赔款分析表，如表 6－15 所示。

表 6-15

起赔点	超过起赔点的赔款		自负赔款	超额赔款	超额赔款占总赔款的百分比
	金额	件数			
0	2 961 900	960	0	2 961 900	100
5 000	2 321 000	206	1 670 900	1 291 000	43.59
10 000	1 445 000	86	2 376 900	585 000	19.75
15 000	635 000	26	2 716 900	245 000	8.27
25 000	195 000	6	2 916 900	45 000	1.52
35 000	40 000	1	2 956 900	5 000	0.17

超额赔款的计算方法说明。例如，在起赔点为 5 000 时，由于规模在 0～5 000 的赔款金额共 640 900，且规模超过 5 000 的共 206 件，所以分出公司自留赔款为 640 900 + 5 000 × 206 = 1 670 900。由于赔款总计为 2 961 900，所以分出公司超额赔款为 2 961 900 - 1 670 900 = 1 291 000。

令 M = 2 500，然后把各种可能的起赔点用 KM 表示，K = 1，2，…。分层超额赔款再保险各层所承担的责任即为两个起赔点之间的赔款额度，不妨记两个起赔点分别为第一起赔点和第二起赔点。表 6-16 为各再保险责任额度内的赔款占总赔款的百分比。

表 6-16

第一起赔点	第二起赔点					
	2M	4M	6M	10M	14M	无限制
0M	56.41	80.25	91.73	98.48	99.83	100
2M	—	23.84	35.32	42.07	43.42	43.59
4M	—	—	11.48	18.23	19.58	19.75
6M	—	—	—	6.75	8.10	8.27
10M	—	—	—	—	1.35	1.52

这就是我们估计的各层 ELCF。例如第一起赔点 6M，第二起赔点 10M 的赔款幅度是 6.75%，其表示再保险人承担超过 1.5 万元，限额责任是

1.0 万元。在这额度内赔款占总赔款的 6.75%（8.27% ~1.52%）。

如果假定一般损失率 PPLR 是 60%，原保险费率有 5% 的不足（RCF = 0.95），则有表 6 – 17，即超额再保险纯保费占原保险费的百分比 r。

表 6 – 17

第一起赔点	第二起赔点					
	2M	4M	6M	10M	14M	无限制
0M	35.63	50.68	57.93	62.20	63.05	63.16
2M	—	15.06	22.31	26.57	27.43	27.53
4M	—	—	7.25	11.51	12.37	12.47
6M	—	—	—	4.26	5.12	5.22
10M	—	—	—	—	0.85	0.96

在该火险中，原保险人收某风险单位的保费为 10 万元。原保险人订立了一份超额分保合同，第一起赔点 4M（1 万元），第二起赔点 10M（2.5 万元）。假定 PPLR = 60%，RCF = 0.95，查表得 r = 11.51%，所以超赔分保纯保费为 11.51% ×10 万 = 11 510 元。

【例 6 – 15】　关于某个险种，有如下假定：最大可能损失 MPL 为 1 000 万元，再保险起赔点为 100 万元，再保险限额为 400 万元，原保险人平均赔付率 PPLR 为 65%，分出人的费率有 5% 的不足，即 RCF = 0.95。

再假定损失额度与 MPL 的比值服从删截（Censored）Pareto 分布，其分布为：

$$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x) = \begin{cases} \left(\dfrac{b}{b+x}\right)^q, & x < 1 \\ 0, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

式中损失规模 X 表示占 MPL 的百分比。

一般来说，Pareto 分布和删截 Pareto 分布的分布函数分别为：

$$F(x) = 1 - \left(\frac{b}{b+x}\right)^q$$

$$F(x) = \begin{cases} F(x), & x < c \\ 1, & x \geqslant c \end{cases}$$

经推导，Pareto 分布和删截 Pareto 分布的均值分别为：

$$E(X) = \frac{b}{q-1}$$

$$E(X,c) = E(X)\left[1 - \left(\frac{b}{b+c}\right)^{q-1}\right] = \frac{b}{q-1}\left[1 - \left(\frac{b}{b+c}\right)^{q-1}\right]$$

假定参数 b = 0.1，q = 2，那么损失达到 MPL 的概率：$P(X\geqslant 1)=\left(\frac{b}{b+1}\right)^{q}=0.0083$ 如果损失发生，平均损失大小占 MPL 的百分比为：$E(X,1)=\frac{b}{q-1}\left[1-\left(\frac{b}{b+1}\right)^{q-1}\right]=0.0909$ 在再保险责任范围内发生的每件损失占 MPL 的百分比为：

$$E[X-0.1\mid(0.1,0.5)]=\left(\frac{b}{q-1}\right)\left[\left(\frac{b}{b+0.1}\right)^{q-1}-\left(\frac{b}{b+0.5}\right)^{q-1}\right]=0.0333$$

所以，ELCF = 0.0333/0.0909 = 0.3663

从而超额分保合同的预期损失占原保险费的百分比为：

$$r=\frac{ELCF\times PPLR}{RCF}=\frac{0.3663\times 0.65}{0.95}=0.25063$$

原保险人收取的保险费 PF = 10 万元，故超赔分保的纯保险费 P = 2.5063 万元。

（3）再保险总保费。在确定好纯费率之后，我们再来看再保险总保费的计算。

$$再保费=\frac{再保险期望赔款的现值}{(1-分保佣金率-经纪人佣金率)\times(1-内部费用率)\times(1-利润附加率)}$$

上式包含多个概念，下面将逐一说明：

再保险期望赔款的现值，是指再保险人在未来赔款的期望现值，即纯保费与贴现因子的乘积。

分保佣金，是再保险公司支付给原保险人的费用，属于外部费用，根据再保费的一定比例计算。分保佣金并非是必需的。

经纪人佣金也是再保险的外部费用，根据再保费的一定比例计算，支付给再保险中介机构。

因此，再保险人的实际现金保费收入 = 再保费 ×（1 − 分保佣金率 − 经纪人佣金率）

内部费用，是根据再保险公司实际收到的现金保费的一定比例计算，随着再保险业务变化，内部费用 = 再保费 ×（1 − 分保佣金率 − 经纪人佣金率）× 内部费用率

利润附加率，表示为纯再保险费的一定比例，其大小取决于再保险公司的资本收益率和再保险业务的相对风险。注意，这里的纯再保险费是再保险人用于支付赔款、获取利润的保费，包含了利润附加，不是原保险的纯保费。

所以，纯再保费 = 再保费 ×（1 − 分保佣金率 − 经纪人佣金率）×（1 − 内部费用率）

在超额再保险实务中，为方便计算，我们习惯上用分数表示附加费用

和赔款成本的比，如 100/70，它表示附加费用是赔款成本的 30/70。其一般形式为(X + Y)/Y，式中 X/Y 表示附加费用率。在意外险特别是责任险中，附加费显得偏高，主要是为了弥补已发生但未报告的赔款（IBNR）的不足。

6.3.2 再保险的准备金评估

我们通常将未到期保费责任和未决赔款责任统称为未了责任。当一个分保合同终止时或一个分保年度结束时，分出公司要向原接受公司收回与其未了责任相对应的未到期保费和未决赔款，并将其转让给新的分保接受公司。这样对原接受公司来说是未了责任的转出，对新的接受公司来说是未了责任的转入。比例再保险合同中一般要约定有关未了责任的计算方法，即未到期保费和未决赔款的计算方法，以此来确定未到期责任准备金和未决赔款责任准备金。

1. *未到期责任准备金*。非寿险中常用的未到期责任准备金的评估方法是比例法和风险分布法。下面我们简单回顾年比例法（1/2 法）、季比例法（1/8 法）和月比例法（1/24 法）。

（1）年比例法。年比例法假定全年的保险单是 365 天逐日开出的，且每天开出保险单的保险金额和保险单数量大体是均匀的。因此，2009 年 1 月 1 日开出的保单在当年 12 月 31 日业务年度终止时，其未到期责任是零，而 1 月 2 日开出的保单已满期限是 364 天，未满期限是 1 天，未到期责任是 1 月 2 日保费的 1/365。

这样，全年所有开出保单的平均未满期限是 182.5 天，即 365 天的一半，于是 2009 年的业务在 2009 年 12 月 31 日的未到期责任准备金为：

$$\text{未到期责任准备金} = \text{全年保费} \times 50\%$$

（2）季比例法。季比例法将全年保费按照季度划分，分为 4 个季度 8 个单位，并假设保费在每个季度是均匀流入的，第一季度的所有保单以 2 月 15 日为起期日，第二季度的所有保单以 5 月 15 日为起期日，第三季度的所有保单以 8 月 15 日为起期日，第四季度的所有保单以 11 月 15 日为起期日。因此，若评估日为 2009 年 12 月 31 日，第 m 个季度的未到期保费责任准备金为：

$$\begin{matrix}\text{对第 m 个季度提取}\\\text{的未到期责任准备金}\end{matrix} = \text{第 m 个季度的保费收入} \times (2m-1)/8$$

（3）月比例法。月比例法原理也与上述类似，将全年保费按照月份划分，分为 12 个月 24 个单位，并假设保费在每个月是均匀流入的，每月的所有保单以该月 15 日为起期日。因此，若评估日为 2009 年 12 月 31 日，第 m 个月的未到期保费责任准备金为：

$$\text{对第 m 个月提取的未到期责任准备金} = \text{第 m 个月的保费收入} \times (2m-1)/24$$

2. 未决赔款责任准备金。再保险接受人未决赔款准备金的构成包括：再保险分出公司报送的已发生已报案未决赔款准备金；再保险接受人对单个赔案提取的额外已发生已报案未决赔款准备金；有关上述两项的未来发展的精算预估；纯 IBNR 的精算预估；未来投资所得的折现；风险附加。

再保险未决赔款准备金的评估过程主要有四个步骤：首先，将再保险业务划分为具有合理同质性的风险类别，并对于每一类别的不同的业务混合在时间上具有相对一致性。其次，分析历史损失数据的发展模式。第三，预估未来发展。最后，建立相应的参数模型，对 IBNR 进行评估。

与原保险相比，再保险未决赔款准备金的评估更为困难，这是因为：报案延迟通常更长，特别是责任超赔分保合约；大部分再保险接受人未决赔款准备金有持续上涨的趋势；理赔报案模型受到险种、合同性质与条件、再保险分出人以及经纪人的影响；整个保险行业的统计信息可能并不很有用；再保险接受人收到的报案信息往往不完整；再保险接受人对资料编码和 IT 系统方面的要求更高；未决赔款准备金的规模对再保险接受人更为重要。

下面将介绍不同风险业务的各自适用的评估方法。

（1）短尾风险业务的未决赔款准备金评估。短尾风险业务，如大部分的财产再保险，损失报告和解决都较快，损失负债相对较小，流量较迅速。因此采取简单的方法就可以了。短尾风险业务主要有：财产险比例再保险合约、财产险巨灾再保险合约、财产险超赔再保险合约、财产险临时分保等。

一般来说，再保险接受人会先设定 IBNR 比率，在此基础上对短尾财产险业务计提 IBNR，该 IBNR 一般表示为已赚保费的一定比例。对于没有巨灾索赔的损失，这是一个合理有效的方法。通常情况下应当将巨灾单独考虑，因为巨灾理赔往往持续很长时间。

当再保险接受人可以使用的损失数据较少时，如新业务，可以按某一选定损失率来提取未决赔款准备金。在短尾风险中，假定选定损失率跟过去的经验损失率有密切的关系，而且比从已报告的索赔数据计算出来的要大。对于没有巨灾损失的短尾业务，这也是合理的方法。

（2）中尾风险业务的未决赔款准备金评估。中尾风险业务是指那些 5 年内基本结案、平均报案延迟在 1—2 年之间的风险业务。中尾风险业务主要有：财产超赔再保险合同较高层、建工险再保险、保证保险再保险、海

上保险再保险、内陆水险再保险、跨国财产险再保险、非责任险的累计超赔再保险等。

对于中尾风险再保险，即使报案速度快，也很难立刻知道其最终赔款额，要确定该赔案是否会影响到具有较高起赔点的险位超赔分保合约就要等待较长时间。

评估中尾风险业务 IBNR 的一种有效方法是链梯法，和原保险的准备金提取方法类似，通过计算相继发展年的发展因子估计未决赔款准备金，这个发展因子是利用累计已报案赔款流量三角形计算的，其原理和具体计算过程在的上一章已有详细介绍。

有时，用已决赔款的发展比已报案赔款的发展更加稳定。此时，可以首先对已决赔款流量三角形应用链梯法得到各事故年度的终极损失，然后根据已决赔案数的发展情况进行合理调整，确定最终损失的估计值。但缺点在于，这样得到的未决赔款准备金估计值的误差往往比用已报案赔款数据得到的未决赔款准备金估计值的误差大很多。

（3）长尾风险业务的未决赔款准备金评估。长尾风险业务的报案延迟一般超过两年，且结案延迟长达数年以上。长尾风险业务主要有：责任险超赔合同再保险、责任险比例合同再保险、责任险临时分保、责任险累计超额再保险等。

这类业务的准备金提取方法主要是：

① 链梯法。该方法的缺点是，对于很长的报告时滞的业务，由于已报告或已赔付的损失数据比较少，对于最近年份的损失的 IBNR 估计波动性很大。

② B-F 法。该方法在上一章已有介绍，其优点是它计算未来的进展为再保险保费乘以选定损失率，而不足之处是对于选定损失率的选取依赖性很强，且每个事故年的估计没有反映当年已经报告的损失。

③ Stanard-Buhlmann（Cape Cod）法。S-B 法也是依赖于累计已报案赔款发展模式，且需要借助于链梯法或其他方法估计一些中间结果。S-B 法的改进之处在于所有年份的最终预期损失率并不是像 B-F 法中根据判断得来，而是根据已报告的数据估计得来。

S-B 法得到的预期损失率（ELR）估计和 IBNR 的估计如下：

$$\mathrm{ELR} = \frac{\sum[\mathrm{RRL}(k)]}{\sum[\mathrm{ARPP}(k) \times \mathrm{Rlag}(k)]}$$

$$\mathrm{IBNR}(k) = \mathrm{ELR} \times \mathrm{ARPP}(k) \times [1 - \mathrm{Rlag}(k)]$$

其中，$\mathrm{IBNR}(k)$是第 k 年的 IBNR 估计；

$\mathrm{RRL}(k)$是第 k 年的已报案再保险损失；

$\mathrm{ARPP}(k)$是第 k 年已调整纯保费；

Rlag(k)是第 k 年的已报案赔款延迟。

下面用例子简单说明 S-B 法，见表 6－18。

【例 6－16】

表 6－18

(1)	(2)	(3) ARPP	(4) RRL	(5) Rlag	(6)
日历年/事故年	已赚纯保费(元)	调整保费(元)	累计已报案赔款(元)	已报案赔款延迟	已用保费(元) (3)×(5)
1996	6 000	8 000	7 000	95%	7 600
1997	7 000	7 000	5 000	85%	5 950
1998	8 000	6 000	3 000	70%	4 200
1999	9 000	7 000	2 000	50%	3 500
2000	10 000	10 000	4 000	30%	3 000
总计	40 000	38 000	21 000		24 250

$$\mathrm{ELR} = \frac{\sum\left[\mathrm{RRL}(k)\right]}{\sum\left[\mathrm{ARPP}(k)\times \mathrm{Rlag}(k)\right]} = \frac{21\ 000}{24\ 250} = 0.866$$

即用 S-B 法计算的预期损失率是 86.6%。

§6.4 最优再保险

6.4.1 再保险最优化的意义

再保险最优化是指在再保险业务运营中，再保险合约的双方或多方通过恰当的分保安排或风险交换，使保险公司承担的风险更小或获得的利润更大，达到稳定公司财务，保证偿付能力的目的。再保险最优化主要作用在于识别风险并将其分类，借助各种优化思想以最大化风险收益、最小化损失，同时使风险在各个公司之间进行进一步的分摊，提高保险经营的效率，以此来促进整个保险业的经营稳定。

我们知道，再保险的主要功能体现为分散承保风险、增强可运用资金等。保险公司为分散风险和维持稳定的经营，往往购买再保险来分散一部分风险，但原保险公司减少自负风险的同时，保费收入也因而减少。从保险人的角度看，再保险行为类似金融中的投资行为。一方面，再保险中包含了附加保费和利润等，购买再保险必然会减少保险人的期望收益；另一

方面，一个合理的再保险会增加安全性即降低风险，保险人要在收益和风险之间权衡以得到最优的再保险策略。每个保险公司通过再保险都想使自身风险或可能发生的赔付最小化，同时使自身获得的期望利润最大化。因此，如何权衡利润和风险的关系，引发了很多学者对再保险最优化的研究，包括采取何种再保险形式、如何确定最优自留水平等。

对再保险的研究是保险业稳健经营的手段之一，它渗透于保险公司的各个环节，包括保险产品的设计和定价、各项责任准备金的评估提取、资产负债管理、偿付能力计算、风险管理及投资等。再保险对保险公司的重要性是随着经济不断发展和高额保单越来越多的基础上才逐渐被认识的。根据我国保险业的实际发展情况，借鉴国外经验以加大对再保险及最优再保险的理论探讨，就显得尤其重要。

6.4.2　最优再保险的主要研究方法与各种优化准则

1. *最优再保险的主要研究方法*。最优再保险的研究方法有很多，目前并没有统一的评判标准。但无论那一种都要明确最优的定义，最优再保险形式的选择，以及各种参数的求解。下面简单介绍两种常见的最优化方法。

（1）效用理论下的最优再保险。效用概念是220多年以前由数学家丹尼尔·贝努利提出的，是19世纪后期发展起来的经济理论的基石。Nolfi是第一个把效用概念运用到保险数学中的，但他当时的研究处于初级阶段，仅仅限于如何计算保费附加以使公司的效用最大化。后来，效用理论的追随者将效用理论用于再保险最优化研究，从而使其迅速发展起来。古德伯格是第一个把效用概念引入到再保险优化方法中的。效用理论是再保险优化问题的传统解决方法，它没有确定的解。采用这种方法的大多数人用一些关于某些稳定性的度量与某些参数之间关系的数学表达式来为他们的研究作结论，如破产概率与最大自留额之间关系的数学表达式，保险公司可以在一定范围内给这些参数任意赋值。后来，Karl Borch 发展了效用理论，形成了一套自己的体系，并且利用贝努利假设，引进效用函数，借助拉格朗日乘数法，推导出一系列最优分出额和分入额的表达式。

其基本思想是：假定原保险人对待风险的态度可以用贝努利效用函数$u(x)$来表示，其最优的分保安排由货币效用的大小来决定。同时假定保险人为风险厌恶型的，即$u'(x)>0$，$u''(x)<0$，在给定损失分布的条件下，推出使保险人效用最大的自留额。

假定一保险人处于可以导致其损失的风险之中，由具有分布为$F(x)$的随机变量来代表。进一步假定只要支付保险费$P(y)$就可以得到再保险合同，该合同保证它的损失达到x时就给补偿$y(x)$。该保险人的问题就是找到一份最优的再保险合同，以及当价格由函数$P(y)$给定时的最优函

数$y(x)$。

假定原保险人的最初价值为 S，我们所要得就是如下最大化问题：

$$\int_0^{\infty} u(S - P(y) - x + y(x))dF(x)$$

当函数 $P(y)$ 且 $y(x) \in Y$ 时，$0 \leqslant y(x) \leqslant x$，集合 Y 可解释为市场上可得到的保单集合。

我们假定保费有如下形式（即期望值原理）：

$$P(y) = (1 + \lambda)\int_0^{\infty} y(x)dF(x) \tag{6.4.1}$$

即净保费在包括附加保费在内的保险费中只占一定比例，λ 为安全附加系数。基于该假定，最优保单是如下形式：

$$y(x) = 0, x < M$$

$$y(x) = x - M, x \geqslant M$$

决定最优再保险合同的问题就成为原保险人寻找最优自留额 M，即：

$$\max_{0 \leqslant M}\left[\int_0^{M} u(S - P - x)dF(x) + \int_M^{\infty} u(S - P - M)dF(x)\right]$$

约束条件为，向再保险人收取的保费满足如下形式：

$$P = (1 + \lambda)\int_M^{\infty}(x - M)dF(x) \tag{6.4.2}$$

根据 $U = \int_0^{M} u(S - P - x)dF(x) + \int_M^{\infty} u(S - P - M)dF(x)$

得到 $\dfrac{dU}{dM} = -\dfrac{dP}{dM}\displaystyle\int_0^{M} u'(S - P - x)dF(x) - \left(1 + \dfrac{dP}{dM}\right)u'(S - P - x)(1 - F(M))$

根据式（6.4.2），有$\dfrac{dP}{dM} = -(1 + \lambda)[1 - F(M)]$

因此，有下面决定最优自留额 M 的方程

$$(1 + \lambda)\int_0^{M} u'(S - P - x)dF(x) = [(1 + \lambda)F(M) - \lambda]u'(S - P - M)$$

（2）均值——方差理论下的最优再保险。早期提出最小方差再保险的是英国精算学专家 Stenfan Vajda，他站在再保险人的角度，通过调整变异系数，在给定再保险保费的前提下，使再保险人所承担的风险最小，从而得出在方差原理下成数再保为最优模型的结论。后来，Marek Kaluszka 对该方法进行了改进，提出了用均值——方差原理来解决再保险的最优化问题。他通过确定在既定再保险保费下，使原保险人自留保险风险最小，从而得出再保险最优的自留比例或自留额的表达式，并且在此基础之上，又扩张了自己的成果，分别推出了修正方差原理及混合原理下的结论。

其基本思想是：再保险人所收取的风险保费 P 是其所承担风险损失的期望与方差的函数，并以此为基础，寻找一自留额，使分出公司即原保险

人所承担风险最小。再保险人在总索赔量 X 中所占的份额为 $R(X)$，用方差来测度就是使 $V(X-R(X))$ 达到最小，从而解出最优再保险模型，即获得最优分出风险的数学表达式，其中 $V(U)$ 为随机变量的方差。

2. 各种优化准则。常见的优化准则有：最大期望利润、最小化方差、最小化保费、最小化破产概率和最大化调节系数。

Michel Denuit，Kass R Van Hessctager，Muller，David CM Dickson 都讨论过最优再保险准则。他们将再保险保费与自留风险的某一特征相比较。例如，在相同成本下，当自留风险变异最小时，利用通常的优化准则，都证明了停止损失再保险的优越性。Bulman，Deprez Gerber，Bjarne Hojguard 等人从调节系数角度研究了纯费率时最优再保险问题，以破产概率最小为目标，对有交易成本的扩散模型的最优比例再保险策略进行了研究。Leslaw Gajek，Dariusz zagrodny 以保险公司自留额方差最小化为准则讨论了最优再保险问题。与此相似，Kaluszka M 以自留额方差最小化为准则，但保费计算原则更一般化，得出了与之相同的结论。在此基础上，Kaluszka M 又将优化准则扩展为使自留额的凸风险函数的期望最小化，得出了包括停止损失再保险，成数再保险，限额停止损失再保险在内的最优再保险形式。Leslaw Gajek，Dariusz zagrodny 针对几种特殊的损失函数，以最小化期望损失为优化准则研究了最优再保险问题，并得出了相应的最优再保险形式。最后，Kaluszka M 在前有研究基础上，将不同优化准则进行了综合考虑得到了各种形式的最优再保险。

§6.5　再保险创新

6.5.1　财务再保险

1. 财务再保险概述。财务再保险起源于美国的非寿险市场，原先是非寿险公司希望得到再保险公司的财务援助，来降低因为自然灾害发生、赔偿支付过多造成公司财务亏损。自 20 世纪 90 年代以来，寿险公司也开始运用财务再保险这种新型理财工具，转移投资风险，调节原保险人财务状况，平衡利润和改善公司财务报表。

财务再保险是原保险人把已有业务的利益或损失分给再保险人，由再保险人来承担将来保险业务收益的风险。依据合同约定，原保险人支付一定的分保费给再保险人，再保险人按照原保险人的要求向其返还扣除经营费用之后的保费和投资收益。原保险人购买财务再保险的主要目的是为了得到在某一时点上包括偿付能力在内的综合资金实力，保证其财务收支平衡，避免由于积累承保损失或其他经济因素的变化所致的亏

损或破产。对于再保险人来说，一般财务再保险合同也要设定一个再保险人所承担累计责任风险的上限，并赋予再保险人在一定的条件下终止合同的权利。

和传统再保险一样，财务再保险也是为保险公司提供转移风险的工具，只是传统再保险的目的是分摊承保风险为主，而财务再保险则是着重分担财务风险。

承保风险是保险公司承保风险事故可能产生亏损的风险，而财务风险还包括信用风险、资产风险、利率风险、时间风险等。若财务再保险不具有转移承保风险的功能，则只能视为平衡资产负债表的一种手段。通过财务再保险的安排，可以使保险公司未来的利润在当期实现；再加上保险公司已将负债分出，这样就可改善报表的结果。这是传统再保险与财务再保险最大的不同。

财务再保险的主要功能在于：再保险公司对新业务提供资金协助；改变险种利润/损失的显露方式及时间；降低股东的资本投入及提高资本的回报率。财务再保险不同于传统再保险只是承接新业务的分入、分出，还承接老业务、已有业务的分保，是分出人把已有业务的利益或损失分给分入人，由分入人来承担将来保险业务收益的风险。

在早期，人们认为财务再保险只能粉饰财务报表，帮助保险人逃避税收，因此许多国家和地区禁止使用财务再保险。近年来，国际上再保险发展甚为迅速，财务再保险被认为是新型理财工具，日益受到重视，各国监管机构无不密切关注其发展，并逐步放开禁令，对财务再保险制定相关法规，规范其发展。

从实务上来看，作为保险公司规避其经营风险的创新型工具，财务再保险在我国必将有巨大的发展空间。首先，目前我国寿险公司在出现大量的利差损的情况下，可以通过财务再保险转移利差损；其次，我国目前保险资金运用的法定渠道较少，保险公司为提高资金运用的效益，很可能通过财务再保险的方式将资金转移到收益率较高的地区；第三，目前保险公司都在争取早日上市，上市之后财务信息将向公众公开，财务报表是否好看将影响投资者的信心和投保人的选择，这就促使保险公司采用财务再保险的方式来平衡利润、装饰报表。

财务再保险这种创新型的理财工具有其独特的优点，虽然它可能造成资金外流，减少了国家的税收，但只要政府监督管理机关制定相应的法规规范其发展，就可以既限制那些纯粹转移资金、逃避税收的财务再保险的蔓延，又使财务再保险纳入了正常发展的轨道。

2. *财务再保险的方式*。在实务中，财务再保险的方式多种多样，但大部分可以归于下面三种：

（1）财务成数比例再保险 。财务成数比例再保险是最古老的，也是最基础的财务再保险。它被设计来缓解原保险人的财务压力。一般情况下，那些盈余相对较少的承保汽车保险的保险人还常常采用这种财务再保险的方式。在这种财务再保险的安排之下，原保险人转移了一部分未到期保费给再保险人，同时收到再保险人支付的相应手续费，这笔手续费在财务报表上被作为当期收入，这样就增加了原保险人的法定盈余。而再保险人收到的分保费和其投资收入将足够支付可能的索赔。

【例 6－17】 一个小型的经营非寿险的保险公司，在 1999 年初，拥有 1 千万美元的盈余，承保了 2 千万美元保费的保单，费用率为 30%（即取得保单花费了 6 百万美元），赔付率为 70%，保费收入在 2 年才能实现。按照法定会计的要求，保单的取得费用必须在第 1 年全部计入成本，这造成了原保险人承保业务的亏损。如表 6－19 所示。

表 6－19　　原保险人财务报表　　单位：万美元

项目	保费收入	未到期保费	已到期保费	赔款支出	保单取得费用	法定利润	盈余	保费收入/盈余
1999 年	2 000	1 000	1 000	700	600	-300	700	2.86/1
2000 年	—	—	1 000	700	—	300	1 000	0/1

1999 年亏损 3 百万美元，致使年初盈余 1 千万美元减少为 7 百万美元，假设 2000 年未接受新保单业务，1999 年的未到期保费 1 千万美元在 2000 年到期，实现收入，2000 年实现利润 3 百万美元，致使盈余恢复为 1 千万美元。

假如保险人采取了财务成数比例再保险，向再保险人分出未到期保费 1 千万美元给再保险人，得到 30% 的手续费，再保险人承担未来的赔付责任。那么再保险人和原保险人的报表分别如表 6－20、表 6－21 所示。

表 6－20　　再保险人财务报表　　单位：万美元

项　目	保费收入	未到期保费	已到期保费	赔款支出	保单取得费用	法定利润
1999 年	1 000	1 000	—	—	300	-300
2000 年	—	—	1 000	700	—	300

表 6－21　　原保险人财务报表　　单位：万美元

项目	保费收入	未到期保费	已到期保费	赔款支出	保单取得费用	法定利润	盈余	保费收入/盈余
1999 年	1 000	0	1 000	700	300	0	1 000	1/1
2000 年	—	0	0	0	0	0	0	0/1

原保险人采用财务成数比例再保险，似乎是再保险人借出自己的盈余给原保险人，从而使保费收入/盈余的比率降低，这就可以扩大原保险人业务扩展的潜力。

（2）追溯再保险。追溯再保险是对过去已发生的损失进行承保的保险设计，是在一定限额内分出公司将已存在的损失转嫁到再保险人身上。主要有时间和距离财务再保险和赔款责任转移再保险。

时间和距离分保合同是原保险人为提高承保收入和现金流量所采取的再保险方式。原保险人支付一笔较大的保费给财务再保险人，财务再保险人根据固定的时间表支付保险赔款给原保险人，再保险赔款是以财务为基础构建，而不与原保险人的实际赔付相对应。再保险的价格取决于原保险人最初所支付的保费和该保费由再保险人投资运用所产生的收益。通过时间和距离再保险合同，再保险人排除了时间和承保风险，原保险人将投资风险转移给了再保险人。

【例 6－18】 假设某一原保险人需要减少其风险责任中的溢额部分（超出其承保能力的部分），因而决定将赔款准备金中的 10 万美元（没有贴现时的总额）分给再保险人。假设其真实损失将在未来 5 年内平均赔付，因而 10 万美元的赔款准备金其现值共计为 86 590 美元（假定年贴现率为 5%），这样，分出公司只需要向再保险人支付 86 590 美元的再保险费以及其他杂项费用和一般管理费用，就可以满足再保险人因为预计会有损失因而需要积累 10 万美元的赔款准备金的要求。

在时间和距离分保合同中，再保险人依照一个给付计划向分出公司给付保险金。比如，对分出公司的已决赔款部分的保险金给付，每年最高限额为 2 万美元，赔付期间为 5 年。在本例中，再保险人承担了投资风险，即年投资收益率可能不会有 5% 这么高，但它并没有承担时间风险和承保风险。如果真实损失低于 10 万美元，再保险人将会因为承保这笔再保险业务而获得承保收益。在这种再保险设计中，原保险人可以通过将其赔款准备金的远期投资收入作即期换算，来增加原保险人的净收益。原保险人净收益的增加是 13 410 美元（即 10 万美元减去 86 590 美元的部分）。

赔款责任转移再保险是原保险人将一组直接保险合同的全部赔款责任转让给再保险人。原保险人通过免去固定给付时间的赔款责任，时间风险完全转移到再保险人身上。由于在某些赔款责任转移再保险合同中，再保险人承担赔款准备金可能会增大的风险，因而甚至连一部分承保风险也转移到再保险人身上。

赔款责任转移再保险对一些放弃经营的保险业务和期满的保险合同非常有用，它可以转移原保险人资产负债表上的大量负债。在把损失赔偿责任完全转移给再保险人的同时，也相应分出保费给再保险人，分出保费大

约等于赔款责任准备金的现值。这样使负债减少，盈余增加。

【例 6－19】 一家原保险人在购买再保险之前的财务报表如表 6－22、表 6－23 所示。

表 6－22 资产负债表 单位：万美元

资产		负债	
现金与投资资产	100 000	未决赔款	400 000
其他资产	900 000	其他负债	450 000
资产合计	1 000 000	负债合计	850 000
		资本盈余	150 000
总计	1 000 000	总计	1 000 000

表 6－23 利润表 单位：万美元

项目	
已到期保费	500 000
提取未决赔款准备金	400 000
费用	150 000
承保业务利润	－50 000
投资收益	50 000
营业利润	0

原保险人转移了未决赔款 4 亿美元中的 1 亿美元给再保险人，再保险人在估算 1 亿美元中最大的损失额之后，再求原保险人支付 6 000 万美元的保费给再保险人。因为再保险人计算得出，6 000 万美元的投资收入将比预计的损失补偿支出更快。这个损失支出的模型构成了财务再保险人称为的“时间风险”，即实际支付的赔款/未决赔款的比率超过投资回报/分人保费的比率。假如预测是准确的，赔款支出将不会快于估算的增长速度，那么再保险人在赔款责任转移再保险中就能取得利润。

购买了赔款责任转移再保险后，原保险人的财务报表发生改变，见表 6－24、表 6－25 所示。

表 6－24 资产负债表 单位：万美元

资产		负债	
现金与投资资产	40 000	未决赔款	300 000
其他资产	900 000	其他负债	450 000
资产合计	940 000	负债合计	750 000
		资本盈余	190 000
总计	940 000	总计	940 000

表 6－25　　利　润　表　　单位：万美元

项　目	
已到期保费	440 000
提取未决赔款准备金	300 000
费用	150 000
承保业务利润	－10 000
投资收益	50 000
营业利润	40 000

虽然资产总额减少，但资本与盈余增加了 4 000 万美元，营业利润也增加了 4 000 万美元，这使得保费收入/盈余的比率从原来的 3.33∶1 变为 2.32∶1，提高了保险公司的偿付能力和业务扩展的潜力。

（3）预期再保险。预期再保险，即转嫁的是原保险人承担的当前或在将来发生损失的风险，而并非是赔款责任转移再保险中的过去损失的风险（即追溯性再保险）。

预期再保险合同的一大优点就是其设计具有高度的弹性空间。使用一个附有利润分摊条款的长期财务再保险合同，就可以使再保险人分担承保风险。每年承保额的高峰和低谷趋于平缓，并且如果赔款记录相对比较有利的话，再保险的净成本会有所下降。在实际操作中，因为规定了单位赔款限额和总赔款限额，多数财务再保险合同能够承担大部分时间风险和投资风险，并在很大程度上限制了承保风险。典型的运作方式是再保险人将每年原保险人支付的保费存入其设立的基金账户的贷方，保费的投资收入也记入贷方，赔款支出记入借方，再保险人累计的责任限额被固定在保持基金平衡的水平，目的是补偿再保险人为损失支付的赔款。如果保费和投资收入超过了赔款支出，那么原保险人要得到纯手续费，即分享利润。

因为预期再保险常常承担原保险人的长期负债，如产品责任保险、劳工保险等，所以合同期往往较长，有的长达 10 年。

6.5.2 巨灾风险证券化

1. 巨灾风险证券化概述。传统保险的定价是以大数法则为依据的，但对于巨灾风险，保险人无法依靠大数法则加以分散，一旦发生这类风险，保险人的累积盈余都不足以赔付，甚至可能导致公司破产，造成整个保险业的偿付危机和信任危机。在这种状况下，保险人通常求助于传统的再保险市场。近年来，巨灾的发生频率和损失幅度不断上升，人们对巨灾保险

的需求日益增加。然而，巨灾导致巨额索赔的连续发生，使保险人、再保险人的盈余急剧减少，再保险市场的承保能力明显减弱，供给能力严重不足。20 世纪 90 年代以来，再保险市场已经出现了再保险人对条件即使十分优惠的保险也不愿承保或者续保的异常现象，造成再保险产品价格直线上升。

损失程度的加剧，再保险市场的承保能力不足和费率的上涨，都推动着风险管理者寻求新的巨灾风险分散机制。资产证券化的成功使人们把目光投向了有着巨大容量的资本市场，于是出现了巨灾风险证券化这样的金融创新工具。发达国家的保险公司通过证券化方式将巨灾风险分散于资本市场，极大地提高了对巨灾的偿付能力。保险赔付已成为灾后重建中的一项重要资金来源。

巨灾风险证券化的基本思想是：由资本市场结合保险市场，充当最后贷款人，直接承担承保风险，在特定事件发生时，获得资金，全部或部分免除债务或者按照预先约定的条件融资（贷款或者发行股票）。

巨灾风险证券化产品，是将巨灾证券出售给投资者以获取资金，为巨灾保险风险提供直接保障的创新型金融产品。与其他证券产品不同的是，这些证券的最终回报是与巨灾保险损失的发生及受灾程度紧密相关的，是资本市场与保险及再保险市场结合的产物。目前，保险风险证券化市场上的品种有巨灾债券、巨灾期权、巨灾期货、巨灾互换、应急资本、行业损失担保、债券联结期权、基准风险交易等交易品种。

巨灾风险证券化产品在西方金融市场已经发展了近 20 年。1992 年芝加哥期权交易所首次发行了巨灾期权。随后，市场上出现了许多保险衍生性商品。1997 年以后，美国保险和再保险公司可以通过巨灾风险交易所直接进行风险交换的交易，使得承保不同地区、不同危险种类的保险公司与再保险公司得以相互交换风险。近年来巨灾风险证券化产品发展速度显著增加，2007 年的产品发行量已经达到近 70 亿美元。下面举例介绍巨灾债券：

与一般债券相比不同，巨灾债券本息的偿还条件直接与发行该债券的保险公司因特定的巨灾事件造成的损失状况挂钩。在债券的有效期限内，如果损失事件没有发生，投资者就能收回本金和利息，作为对其借出资金和承担风险的补偿；如果事先确定的巨灾发生了，根据投资者所投资债券的类型或级别，他将失去部分或全部利息和本金，而这部分利息和本金将被用于弥补由于巨灾的发生而导致的业务损失。

巨灾债券的另一种形式是，当特定的巨灾事件发生后，债券发行公司有权将所发行的债券转化为该公司的股票。在这种情况下，投资者要承受将所持债券转化为该公司股票的风险，但同时也可能从中获益，因为巨灾

事件发生后，预期的保险费率会提高，从而使发行债券的保险公司股价上涨。

下面用两阶段的二项式模型来说明一种巨灾债券的结构（假设其面值为 100 美元，息票率为 10%）。这种债券类似于 1997 年由瑞士丰泰再保险公司（Winterthur Re）发行的债券，当巨灾发生时，投资者将损失全部的利息。该债券支付分两个阶段：在第一阶段末，若未发生巨灾，则支付 10 美元息票；若发生了巨灾，不支付。在第二阶段末，若未发生巨灾，则支付面值 100 美元 + 息票 10 美元；若发生了巨灾，仅支付面值 100 美元，如图 6－1 所示。此外，假设巨灾发生的概率为 2%，并且在此结构中采用无风险利率：$r_f=8\%$。基于上述的一系列假设可以求得此种巨灾债券的价格（P＝103.21 美元）。

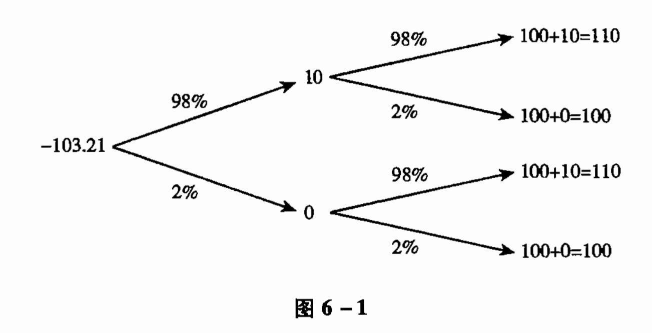


图 6－1

对于一般意义下的债券，我们也可以用上述方法求得其价格（P＝103.57 美元），如图 6－2 所示。

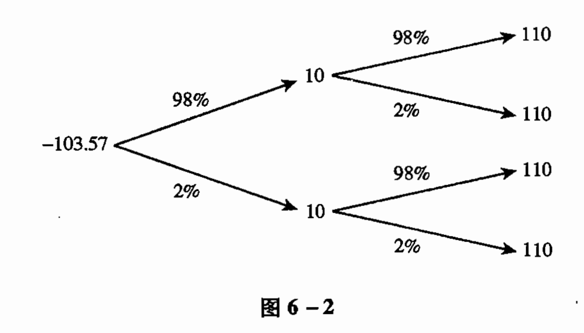


图 6－2

假如一家保险公司在发行巨灾债券的同时又购买了一般意义下的债券，可见在整个交易过程中花费了保险人 0.36 美元/100 美元面值。在未来两年里，若未发生巨灾，保险人的净现金流为零；若在未来任一年度发生了巨灾，保险人可得到 10 美元息票，如图 6－3 所示。事实上，上述过程相当于保险人花 0.36 美元/100 美元面值购买了一个两年期的再保险合约，而在巨灾发生时债券收益 10 美元可用于巨灾损失的赔付。

巨灾债券未来的本金和利息与发行该债券的保险公司事先在合同中所

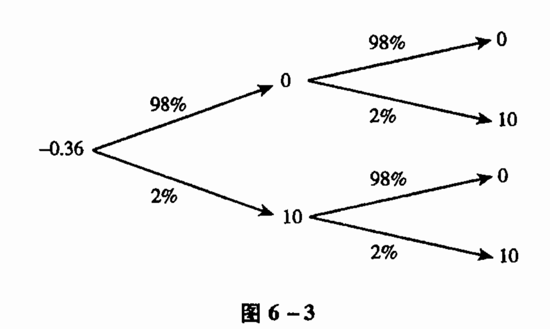


图 6-3

约定的巨灾事件相关，因此，巨灾债券能否对承保人所承保的巨灾风险提供套期保值的作用在很大程度上依赖于巨灾债券的触发机制。

巨灾风险证券化突破了保险界传统意义上的风险管理和保险方式，不仅拓展了风险转移的空间和融资渠道，而且增强了保险机制运行的安全性和高效性。

我国是世界上自然灾害最严重的国家之一，自然灾害种类多，发生频率高、强度大、损失严重。据联合国统计资料显示，20 世纪全球 54 个最严重的自然灾害中，有 8 个发生在中国。在我国保险市场风险分散渠道有限、再保险市场仍不发达的情况下，研究巨灾保险证券化，汲取国外有益的经验，对于提高全民应对巨灾风险的能力，缓解保险公司经营风险有着重要的意义。

2. 巨灾风险的再保险安排。由于巨灾风险常常涉及广大区域且随机性大，所以保险费率和自留额不能按照常规处理，需要由政府财政、企业风险管理和保险公司联系在一起综合处理，形成必要的基金和补偿机制以及特殊的分散风险的再保险方式。

保险人的传统做法是利用再保险的方式将自己承保的巨灾风险部分或全部地转移给再保险人。其中最常见也是最具优势的是针对单项巨灾事件的超额损失再保险。在巨灾超额损失再保险中，分出公司承担低于自留额和高于上限限额的巨灾损失，分入公司则承担高于自留额并低于上限限额的巨灾损失。

除了上面所提及的传统保险市场转移方案，还包括非传统风险转移市场上提供的转移方案，包括自保公司、有限保险和与巨灾相关的资本市场解决方案（巨灾风险证券化等）。巨灾的频繁发生以及资本市场的萎靡不振在很大程度上促进了非传统风险转移市场的发展。

下面举例说明两种巨灾风险的传统再保险安排。

（1）地震风险的再保险。如果要对地震风险进行承保，对保险人来说，要尽最大可能地、广泛地在国际再保险市场上分散风险责任。由于地震风险的责任很大，因此在国际再保险市场上分保的前提条件是要有

充分的保费和合理的分保条件，符合直接保险水平并能及时汇付保费，同时每个再保险市场上的分保接收人都事先决定愿意接受的份额并加以控制，以免遭受巨灾损失。对地震风险的分保方式主要有比例分保和非比例分保两种。

在很多情况下，地震风险的超赔分保合同是以比例分保作为基础的。由于地震风险的性质不宜单独组织比例分保合同，所以经常与火险业务结合在一起。地震保险的保额不能超过火险的保额，只有当建筑物的房基也包括在保险责任内时，作为管理再保险业务责任的整体，地震保险的保额可以高于火险的保额。地震保险的分保费按承担风险的比例计算，即使在保单期间内没有发生损失，其盈余不能视为利润，应作为保证巨灾风险事故后果的准备金。在某些国家，地震保险准备金由法律规定并且享受免税，地震保险准备金应该投资于可以保证流动的途径，其价值应保持在发生巨灾事故时能立即兑现，因此不能投资在购置地震危险区的不动产。

采用非比例分保方式时，通常与比例再保险结合应用，以保障地震保险人可能的巨大损失积累。非比例分保合同的年保费，是根据巨灾的最大可能损失以及分出人的自负责任和合同责任的大小来计算的，其计算原理与直接保险的地震保费计算相似。

（2）风暴风险的再保险。风暴的再保险安排，既可以采用比例分保的形式也可以采用非比例分保的形式。

理论上，在比例分保合同中，风暴风险可以包括在一般财产保险合同范围内承保，也可以分开承保，并且要求分保费与承保的风险等量。但在实际中，风暴风险的分保市场还缺乏基于良好承保原则的适当的风暴风险费率表，一般是把风暴包括在火险或财产险保单中增加一个金额，这样就难以事先分保费与承保的风险等量。在这种情况下，只能在计算分保费时与原保费偏离，由签约双方协议确定分保费，或者降低分保手续费，或者对每次事故损失规定一个免赔额。另外还要注意：必须应用适当的累积控制制度保证关于承担风暴责任的充分透明度；在任何时候发现分保业务的原保费不足时，应计算合适的分保价格；如果可行，对每一个国家或地区决定分保序列或损失限额。

在非比例分保合同中，无论是巨灾超赔保障还是赔付率超赔保障，对任何一次事故都有一个特定的限额，同时也有时间条款的限制。另外需要注意对承保风险范围保持充分的透明度，以及支付适当的分保费。

习　题

1. 按照分保金额的安排，比例再保险和非比例再保险分别可以分为哪

几种类别？

2. 再保险未决赔款准备金的评估中，将风险业务分为哪几类？相应的评估方法各是什么？

3. 常见的再保险最优化方法是哪两种，其基本思想是什么？

4. 巨灾风险证券化的基本思想是什么？市场上常见的产品有哪些？

5. 财务再保险是如何影响原保险人的财务报表的？

6. 某保险公司对承保的保险标的进行成数再保险，每一风险单位的最高限额规定为100万元，自留额为20%，分出比例为80%，现假定保险金额分别为20万元、100万元、200万元，原保险人的分出金额分别是多少万元？

7. 如果某保险人承保了保险金额为100万元的保险标的，赔款300万元，自留额为20万元，某接受公司的接受成分是30%，试计算该接受公司的保险赔付。

8. 若保险标的为250万元，自留额是20万元，第一溢额5根线，第二溢额10根线，则此时第一溢额和第二溢额分别是多少万元？

9. 原保险人与在保险人签订溢额分保合同，每一风险单位的自留额为50万元，分保额为自留额的4根线。现有三个风险单位发生赔案，风险单位1的保险金额为30万元，赔款10万元；风险单位2的保险金额为200万元，赔款80万元；风险单位3的保险金额为300万元，赔款150万元。则再保险人在这三个赔案中，分别应支付多少赔款？

10. 原保险人对某货运险安排了成数分保和溢额分保。成数分保合同的承保能力是100万元，自留20%，成数再保险人A责任80%。原保险人对成数分保合同安排了险位超赔分保合同，险位超赔再保险人B承担赔款超过50万元部分，最高限额50万元。原保险人又以成数分保合同为基础安排了溢额分保，溢额再保险人C的责任是两根线。若某风险单位保险金额为150万元，赔款120万元。那么原保险人、成数再保险人A、险位超赔再保险人B、溢额再保险人C分别摊赔多少万元？

11. 某赔付率超赔合同规定，分出公司负责赔付率在60%以下的赔款，接受公司负责赔付率在60%以上至125%的，现有3个风险单位发生赔案，风险单位1的保险金额为200万元，赔款120万元；风险单位2的保险金额为240万元，赔款180万元；风险单位3的保险金额为160万元，赔款208万元。则接受公司在这三个赔案中，分别应支付多少赔款？若采用了90%共保（即赔付率在60%～125%之间的这一部分，由分出公司再负责10%，接受公司负责剩余的90%），那么接受公司在这三个赔案中，分别应支付多少赔款？

12. 某成数再保险合同，每一风险单位的最高限额规定为800万元，自留35%，分出65%。现有一风险单位的保险金额为600万元，费率为

1/1 000，在保险责任范围内发生损失 10 万元，问保费如何分配，损失如何分摊？

13. 某火险的损失经验数据按赔款规模分级统计如下表：

赔款规模（元）	赔款金额（元）	赔款件数	平均赔款
0—5 000	640 900	754	850
5 000—10 000	876 000	120	7 300
10 000—15 000	810 000	60	13 500
15 000—25 000	440 000	20	22 000
25 000—35 000	155 000	5	31 000
35 000—50 000	40 000	1	40 000
总计	2 961 900	960	3 085

假设一般损失率 PPLR＝60%。设今年该公司用同一费率承保了同类业务，保费收入 1 000 万元。同时向某再保公司订了一份超额分保合同，第一起赔点 1.5 万元，第二起赔点 2.5 万元。RCF＝0.95。试用劳合社比例法求分保费。

14. 假设再保险人的期望赔款是 500 万元，再保险人利润附加率是 20%，再保险的内部费用率是 10%，分保佣金率是 25%，经纪人佣金率是 5%，请计算再保总保费。

15. 已知信息如下表所示，试采用 S-B 法计算预期损失率。

事故年	已赚纯保费（元）	调整保费（元）	累计已报案赔款（元）	已报案赔款延迟（元）
1998	6 500	7 500	7 000	90%
1999	7 500	8 000	6 000	80%
2000	8 700	8 500	4 000	65%
2001	9 300	7 000	3 000	55%
2002	10 000	10 000	3 000	20%
总计	42 000	41 000	23 000	

参考答案

第一章习题参考答案

1. 9.8%

2. 5.6568

3. 0.1036；0.456；0.0051

4. 0.099；0.4901；0.0

5. −1.2%

6. 10；10；0

7. 286.57

8. 114.95；281.48

9. $CTE_p=\frac{\theta}{\gamma-1}+Q_p\frac{\gamma}{\gamma-1}$ 其中，$\theta>0$，$\gamma>1$；243.60；548.70

10. 165.15

11. $TVaR[X;\ p]=\mu+\sigma\left(\frac{\Phi'(\Phi^{-1}(p))}{1-p}\right)$，$p\in(0,\ 1)$

12. $TVaR[X;\ p]=\exp(\mu+\sigma^2/2)\frac{\Phi(\sigma-\Phi^{-1}(p))}{1-p}$，$p\in(0,\ 1)$

13. $ES[X;\ p]=\sigma\Phi'(\Phi^{-1}(p))-\sigma\Phi^{-1}(p)(1-p)$，$p\in(0,\ 1)$

14. $ES[X;\ p]=\exp(\mu+\sigma^2/2)\Phi(\sigma-\Phi^{-1}(p))-\exp(\mu+\sigma\Phi^{-1}(p))(1-p)$，$p\in(0,\ 1)$

15. 257.83

16. 323.52

17. 454.14

18. 644.10

第二章习题参考答案

1. 0.02

2. 6.993，0.469，0.275%

3. 0.196

4. 0.183～0.211

5. 1.35

6. 14.48

7. 不能用指数分布模拟个别理赔额分布

8. 有证据说明

9. 5/502

10. 0.5143

11. Beta（4，6），Beta（4，7）

12. 0.03820837，2.14468661，0.15906502，0.96785666

13. 1.599

14. 897.84，5.93

15. 3，6

16. 略

17. 1 353

18. 19.00

19. 略

20. 略

第三章习题参考答案

1. 已签危险量，已承担危险量和有效危险量分别为0，0.25，0.5

2. （1）75 160（2）1.2167

3. 86 986

4. （1）略

（2）

1－2	2－3	3－4	4－5
1.4527	1.1088	1.0567	1.0451

（3）2 014，2 216，2 236，2 731，3 218

5. （1）略

（2）略

（3）1 230，1 276，1 397，1 468，1 591

6. 0.5833

7. （1）1.05626

（2）1.4525，1.8726，2.0750（千元）

8. 3.1

9. 72

10. 18.7

11. 停止损失保单能获得最大期望效用，其形式为：

$$I_d = \begin{cases} 0 & x < d^* \\ x - d^* & x \geqslant d^* \end{cases}$$

其中 $d^* = 36.75$

12. D

13. 14.36

14. 0.05

15. $k = 0.25$，$d = 50$

第四章习题参考答案

1. $\frac{2}{2n+1}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$，2

2. $1 + X_1 + X_2$

3. 133/24，203/24

4. 9/11

5. 733/72，1 139/72

6. 0.9139，0.3882

7. 19 590，23 692

8. 98.54，112.81

9. 略

10. $\begin{pmatrix} 1-P_0 & P_0 & 0 \\ 1-P_0 & 0 & P_0 \\ 0 & 1-P_0 & P_0 \end{pmatrix}$

11. 略

12. 略

13. 209 450 元

14. 2 808.76

15. 折扣级别 0%，35%，45% 对应的索赔临界值依次为：450，550，100

第五章习题参考答案

1.（1）436.25　（2）575

2. 300 万

3. 3 600

4. 10 000

5. 50 691　44 903　33 818

6. (1) 0.3704

   (2) 67 405　73 935　74 631

   (3) 事故年 2005：0，－4 677

   事故年 2006：10 968，－4 683

   事故年 2007：47 006，3 674

7. 48

8. 993 713

9. 515

10. 264.13

11. 4 808.08

12. 25 688

13. 4 914

14. (1) 4 800　(2) 少计提 495

15. (1)

事故年	最终赔款次数
2005	24 517
2006	26 445
2007	17 865
2008	13 851

(2)

事故年	最终赔款额	IBNR 准备金
2005	62 396	-4
2006	77 801	14 976
2007	58 544	24 984
2008	39 448	28 115
合　计		68 071

第六章习题参考答案

1.—5. 略

6. 20×80%＝16 万元；100×80%＝80 万元；100×80%＝80 万元

7. 300×30%×[(100－20)/100]＝72 万元

8. 分别是 100 万和 130 万

9. 分别是 0 万，60 万，100 万

风险单位 1 的自留额 30 万，因此赔款全部由原保险人支付，再保险人

支付为零；风险单位 2 的自留额 50 万，再保险人分入 150 万，因此赔款 80 万的 3/4 由再保险人支付，即 60 万；风险单位 3 的自留额 100 万，再保险人分入 200 万，因此赔款 150 万的 2/3 由再保险人支付，即 100 万。

10. 原保险人摊赔 10 万元，成数再保险人 A 摊赔 40 万元，险位超赔再保险人 B 摊赔 30 万元，溢额再保险人 C 摊赔 40 万元。

11. 分出公司分别应支付 0，36 万元，104 万元。

若采用了 90% 共保，分出公司分别应支付 0，32.4 万元，93.6 万元。

12. 收取保费 600 万 × (1/1 000) = 6 000 元，保费自留 30%，分出 65%。因此自留保费 2 100 元，分出保费 3 900 元。赔款也按此比例，分出公司自负赔款 3.5 万元，分入公司应负赔款 6.5 万元。

13. 超赔点为 1.5 万，超赔款为：

440 000 + 155 000 + 40 000 − (20 + 5 + 1) × 15 000 = 245 000，

占总赔款额百分比 245 000/2 961 900 = 8.2717%

超赔点为 2.5 万，超赔款为

155 000 + 40 000 − (5 + 1) × 25 000 = 45 000，

占总赔款额百分比 45 000/2 961 900 = 1.52%

所以 ELCF × PPLR/RCF = (8.2717% − 1.52%) × 60%/95% = 4.26%

分保费为 4.26% × 1 000 万 = 42.6 万。

14. 500/[(1 − 0.25 − 0.05) × (1 − 0.1) × (1 − 0.2)] = 992(万元)

15. 预期损失率为 93.8%。

事故年	已赚纯保费(元)	调整保费(元)	累计已报案赔款(元)	已报案赔款延迟(元)	已用保费(元)
1998	6 500	7 500	7 000	90%	6 750
1999	7 500	8 000	6 000	80%	6 400
2000	8 700	8 500	4 000	65%	5 525
2001	9 300	7 000	3 000	55%	3 850
2002	10 000	10 000	3 000	20%	2 000
总计	42 000	41 000	23 000		24 525

$$ELR = \frac{\sum[RRL(k)]}{\sum[ARPP(k) \times Rlag(k)]} = 23\ 000/24\ 525 = 0.938$$

参考文献

1. M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas. Actuarial Theory for Dependent Risks. John Wiley & Sons, Ltd. 2005.

2. Philippe Jorion. Financial Risk Manager Handbook (5th edititon). John Wiley &Sons, Inc. 2009.

3. Mary R Hard. An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications. Education and Examination Committee of the Society of Actuaries. Construction and Evaluation of Actuarial Models Study Note.

4. Giorgio Szego. Measures of risk. Journal of Banking & Finance, 26 (2002), 1253 – 1272.

5. McClenahan, C. L. , Ratemaking, in Foundations of Casualty Actuarial Science, Casualty Actuarial Society, Printed by Dynagraf, Inc. 1996.

6. Gary G. Venter, Chapter 7 Credibility in Foundations of Casualty Actuarial Science, 1996, Casualty Actuarial Society.

7. S. M. 劳斯:《随机过程》,中国统计出版社,1997 年版。

8. Philippe Jorion 著,陈跃等译:《风险价值 VAR (第二版)》,中信出版社,2005 年版。

9. 霍萨克等著,王育宪等译:《非寿险精算基础》,中国金融出版社,1992 年版。

10. 谢志刚、韩天雄:《风险理论与非寿险精算》,南开大学出版社,2000 年版。

11. 王静龙、汤铭、韩天雄:《非寿险精算》,中国人民大学出版社,2004 年版。

12. 杨静平:《非寿险精算学》,北京大学出版社,2006 年版。

13. 肖争艳、高洪忠:《非寿险精算》,中国人民大学出版社,2006 年版。

14. 孟生旺、刘乐平:《非寿险精算学》,中国人民大学出版社,2007 年版。

15. 高洪忠:《再保险精算实务》,北京大学出版社,2008 年版。

16. 胡炳志、陈之楚：《再保险》，中国金融出版社，2006年版。

17. 孟生旺：《保险定价，经验估费系统研究》，中国金融出版社，2004年版。

18. 吴小平：《保险公司非寿险业务准备金评估实务指南》，中国财政经济出版社，2005年版。

19. 谢志刚、周晶晗：《非寿险责任准备金评估》，中国财政经济出版社，2006年版。

20. 茆诗松、王静龙等：《高等数理统计》，高等教育出版社，1998年版。

21. 茆诗松：《贝叶斯统计》，中国统计出版社，1999年版。

22. 何声武：《随机过程导论》，华东师范大学出版社，1989年版。

23. 高惠璇：《统计计算》，北京大学出版社，1995年版。

24. 方再根：《计算机模拟和蒙特卡罗方法》，北京工学院出版社，1988年版。

25. 徐仲济：《蒙特卡罗方法》，上海科学出版社，1985年版。

26. 成世学："关于可信性模型的若干评注"，《应用概率统计》，2002年第4期。

27. 郑苏晋、成世学："NCD系统的数学建模与稳态分析"，《应用概率统计》，2003年第1期。

特 别 鸣 谢

中国精算师资格考试用书《非寿险精算》得以顺利出版，得到了部分保险公司、高等院校及精算咨询机构的鼎立相助，在此特别鸣谢以下单位与个人（排名不分先后）为本书所作出的贡献。

单位名称：中国大地财产保险股份有限公司

个人名单：郭仁斌　陈海伟　杨为颖　王　皓　牛　圃　周昱昊

秦晓波　余　挺

中国精算师协会

2010 年 11 月 15 日